

Dérivation et convexité : exercices type bac

Trois exercices complets, dans le style de l'épreuve du bac : une étude de fonction avec deux points d'inflexion et une équation à solution unique, une fonction logistique avec centre de symétrie, un problème d'aire maximale avec tangente.

Les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une excellente copie de bac : dérivabilité justifiée, formule citée, signe justifié facteur par facteur, tableau avec limites, conclusion à chaque question. **Durée conseillée : 30 minutes par exercice, sur papier, sans regarder la correction.**

Comment t'entraîner efficacement

- Chronomètre-toi et rédige tout, comme le jour du bac.
- Pour chaque dérivée, écris la phrase de dérivabilité, la formule et le résultat factorisé.
- Si tu bloques sur une question, écris « on admet que... » et passe à la suivante.
- À la fin de chaque exercice, ouvre « Points clés attendus » : c'est la liste de ce que le correcteur cherche.

Exercice 1 : étude d'une fonction avec deux points d'inflexion

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}$?
 2. Calculer $f'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau de variations de f .
 3. Calculer $f''(x)$. Étudier la convexité de f et préciser les abscisses des points d'inflexion.
 4. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et que $\alpha \in]-1; -0,5[$.
 5. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
-

Exercice 2 : la fonction logistique et son centre de symétrie

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}$?
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$, puis dresser le tableau de variations de f .
3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = 1 - f(x)$. En déduire que le point $I\left(0; \frac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}$.
4. Étudier la convexité de f et donner le point d'inflexion de $\mathcal{C}$.
5. Déterminer la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'inflexion.

Exercice 3 : une tangente, un triangle et une aire maximale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}$.

Pour tout réel $a > 0$, on note A le point de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisse a , et T_a la tangente à $\mathcal{C}$ en A .

La droite T_a coupe l'axe des abscisses en M et l'axe des ordonnées en N .

On note $S(a)$ l'aire du triangle OMN , où O est l'origine du repère.

1. Montrer que T_a a pour équation $y = e^{-a}(1 + a - x)$.
2. Déterminer les coordonnées de M et de N .
3. Montrer que $S(a) = \frac{1}{2}(1 + a)^2 e^{-a}$.
4. Étudier les variations de S sur $]0; +\infty[$. En déduire la valeur de a pour laquelle l'aire est maximale, et cette aire maximale.
5. Justifier que la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de chacune de ses tangentes.

Les réflexes à retenir

- Une étude de fonction commence par les **limites**, puis la **dérivée factorisée**, puis le **tableau complet**.
- Avant de dériver, **justifie la dérivabilité** ; avant un signe, justifie chaque facteur ($e^{-x} > 0$, carré, trinôme).
- Pour la convexité, calcule f'' avec soin et factorise : l'erreur la plus fréquente est un facteur oublié.
- Une équation à solution unique combine le **corollaire du TVI** et le tableau de variations.
- Un **problème d'optimisation** se termine par une conclusion en contexte, avec la valeur maximale.

Aller plus loin avec les vrais sujets

Quand tu es à l'aise avec ce chapitre, entraîne-toi sur les études de fonctions des sujets officiels des années précédentes.

Ils sont disponibles sur le site de l'[APMEP](#).

Chronomètre-toi et rédige comme le jour du bac.