

Dérivation et convexité : exercices type bac

Trois exercices complets, dans le style de l'épreuve du bac : une étude de fonction avec deux points d'inflexion et une équation à solution unique, une fonction logistique avec centre de symétrie, un problème d'aire maximale avec tangente.

Les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une excellente copie de bac : dérivabilité justifiée, formule citée, signe justifié facteur par facteur, tableau avec limites, conclusion à chaque question. **Durée conseillée : 30 minutes par exercice, sur papier, sans regarder la correction.**

Comment t'entraîner efficacement

- Chronomètre-toi et rédige tout, comme le jour du bac.
- Pour chaque dérivée, écris la phrase de dérivabilité, la formule et le résultat factorisé.
- Si tu bloques sur une question, écris « on admet que... » et passe à la suivante.
- À la fin de chaque exercice, ouvre « Points clés attendus » : c'est la liste de ce que le correcteur cherche.

Exercice 1 : étude d'une fonction avec deux points d'inflexion

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}$?
2. Calculer $f'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau de variations de f .
3. Calculer $f''(x)$. Étudier la convexité de f et préciser les abscisses des points d'inflexion.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et que $\alpha \in]-1; -0,5[$.
5. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

Correction de la question 1

En $-\infty$. Pour $x \neq 0$, $x^2 + x + 1 = x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$, qui tend vers $+\infty$. De plus $e^{-x} \rightarrow +\infty$.

Par produit :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

En $+\infty$. Pour tout x , $f(x) = x^2 e^{-x} + x e^{-x} + e^{-x}$. Par croissances comparées, $x^2 e^{-x} \rightarrow 0$ et $x e^{-x} \rightarrow 0$; de plus $e^{-x} \rightarrow 0$. Par somme :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Conséquence. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

Correction de la question 2

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de $x \mapsto x^2 + x + 1$ et de $x \mapsto e^{-x}$, dérivables sur $\mathbb{R}$. On applique $(uv)' = u'v + uv'$, avec $u(x) = x^2 + x + 1$, $u'(x) = 2x + 1$, $v(x) = e^{-x}$, $v'(x) = -e^{-x}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = (2x + 1)e^{-x} - (x^2 + x + 1)e^{-x} = e^{-x}(2x + 1 - x^2 - x - 1) = e^{-x}(x - x^2)$$

$$f'(x) = x(1 - x)e^{-x}$$

Comme $e^{-x} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $x(1 - x)$, trinôme de racines 0 et 1 et de coefficient dominant négatif. $f'(x) < 0$ sur $] -\infty; 0[$, $f'(x) > 0$ sur $]0; 1[$, $f'(x) < 0$ sur $]1; +\infty[$.

Tableau de variations. f est strictement décroissante sur $] -\infty; 0]$, de la limite $+\infty$ à $f(0) = 1$. f est strictement croissante sur $[0; 1]$, de 1 à $f(1) = 3e^{-1} \approx 1,10$. f est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$, de $\frac{3}{e}$ à la limite 0.

Correction de la question 3

La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit. Avec $f'(x) = (x - x^2)e^{-x}$:

$$f''(x) = (1 - 2x)e^{-x} - (x - x^2)e^{-x} = e^{-x}(1 - 2x - x + x^2)$$

$$f''(x) = (x^2 - 3x + 1)e^{-x}$$

Comme $e^{-x} > 0$, $f''(x)$ est du signe de $x^2 - 3x + 1$.

Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 9 - 4 = 5 > 0$.

Ses racines sont $x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0,38$ et $x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \approx 2,62$.

Son coefficient dominant est positif : il est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles.

f est convexe sur $\left] -\infty; \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right]$ et sur $\left[\frac{3 + \sqrt{5}}{2}; +\infty \right[$, et concave sur $\left[\frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right]$.

Comme f'' s'annule en changeant de signe en x_1 et en x_2 :

la courbe $\mathcal{C}$ admet deux points d'inflexion, d'abscisses $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Correction de la question 4

Sur $] - \infty ; 0]$. La fonction f est continue (dérivable) et strictement décroissante, de $+\infty$ à $f(0) = 1$.

Le nombre 2 appartient à $]1 ; +\infty[$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans $] - \infty ; 0]$.

Sur $[0 ; +\infty[$. D'après le tableau, $f(x) \leq f(1) = \frac{3}{e}$ pour tout $x \geq 0$. Or $\frac{3}{e} < 2$ (car $e > \frac{3}{2}$).

Donc $f(x) < 2$ sur $[0 ; +\infty[$: l'équation $f(x) = 2$ n'y a aucune solution.

Conclusion : l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et $\alpha < 0$.

Encadrement.

$$f(-1) = (1 - 1 + 1)e^1 = e \approx 2,72 > 2$$

$$f(-0,5) = 0,75 e^{0,5} \approx 1,24 < 2$$

Comme f est strictement décroissante sur $] - \infty ; 0]$, $f(-1) > 2 > f(-0,5)$ donne :

$$-1 < \alpha < -0,5$$

Correction de la question 5

L'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)(x - 0)$. On a $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0 \times 1 \times e^0 = 0$.

La tangente T a pour équation $y = 1$: elle est horizontale.

Points clés attendus pour l'exercice 1

- **Q1 :** les deux limites sont justifiées (produit ; croissances comparées puis somme), et l'asymptote est écrite avec sa limite.
- **Q2 :** dérivabilité, formule $(uv)'$ citée, factorisation par e^{-x} , signe du trinôme justifié, tableau avec limite et valeurs.
- **Q3 :** f'' calculée et factorisée, discriminant et racines, signe justifié, convexité et concavité énoncées, points d'inflexion à partir du changement de signe.
- **Q4 :** le corollaire est appliqué sur $] - \infty ; 0]$ et l'absence de solution sur $[0 ; +\infty[$ est justifiée par le maximum, puis l'encadrement est justifié par les deux valeurs et la stricte décroissance.
- **Q5 :** $f(0)$ et $f'(0)$ calculés avant d'écrire l'équation.

Exercice 2 : la fonction logistique et son centre de symétrie

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}$?
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$, puis dresser le tableau de variations de f .
3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = 1 - f(x)$. En déduire que le point $I\left(0; \frac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}$.
4. Étudier la convexité de f et donner le point d'inflexion de $\mathcal{C}$.
5. Déterminer la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'inflexion.

Correction de la question 1

Pour tout x , $1 + e^{-x} > 0$: f est définie sur $\mathbb{R}$.

En $-\infty$. $-x \rightarrow +\infty$, donc $e^{-x} \rightarrow +\infty$, puis $1 + e^{-x} \rightarrow +\infty$. Par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

En $+\infty$. $-x \rightarrow -\infty$, donc $e^{-x} \rightarrow 0$, puis $1 + e^{-x} \rightarrow 1$. Par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

Conséquence. La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $-\infty$. La droite d'équation $y = 1$ l'est en $+\infty$.

Correction de la question 2

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme inverse de la fonction $u : x \mapsto 1 + e^{-x}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et qui ne s'annule pas. On a $u'(x) = -e^{-x}$. Avec $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$:

$$f'(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Comme $e^{-x} > 0$ et $(1 + e^{-x})^2 > 0$, on a $f'(x) > 0$.

La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de la limite 0 en $-\infty$ à la limite 1 en $+\infty$.

Correction de la question 3

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \frac{1}{1+e^x}$. D'autre part :

$$1 - f(x) = \frac{1 + e^{-x} - 1}{1 + e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par $e^x > 0$: $1 - f(x) = \frac{1}{e^x + 1} = f(-x)$.

Donc $f(-x) = 1 - f(x)$ pour tout x .

Ainsi $f(x) + f(-x) = 1$ pour tout x . Le milieu du segment joignant $M(x; f(x))$ et $M'(-x; f(-x))$ a pour coordonnées $\left(0; \frac{f(x) + f(-x)}{2}\right) = \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Donc le point $I\left(0; \frac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}$.

Correction de la question 4

La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Avec $f'(x) = e^{-x}(1 + e^{-x})^{-2}$:

$$f''(x) = -e^{-x}(1 + e^{-x})^{-2} + e^{-x} \times (-2)(1 + e^{-x})^{-3} \times (-e^{-x}) = e^{-x}(1 + e^{-x})^{-3} [-(1 + e^{-x}) + 2e^{-x}]$$

$$f''(x) = \frac{e^{-x}(e^{-x} - 1)}{(1 + e^{-x})^3}$$

Comme $e^{-x} > 0$ et $(1 + e^{-x})^3 > 0$, $f''(x)$ est du signe de $e^{-x} - 1$. Or $e^{-x} > 1 \iff -x > 0 \iff x < 0$. Donc $f'' > 0$ sur $] -\infty; 0[$, $f''(0) = 0$ et $f'' < 0$ sur $]0; +\infty[$.

Donc f est convexe sur $] -\infty; 0]$ et concave sur $[0; +\infty[$.

Comme f'' s'annule en changeant de signe en 0, le point d'abscisse 0 est un point d'inflexion.

Comme $f(0) = \frac{1}{2}$:

$I\left(0; \frac{1}{2}\right)$ est le point d'inflexion (c'est aussi le centre de symétrie).

Correction de la question 5

On a $f(0) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ et $f'(0) = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$. La tangente au point d'inflexion a pour équation $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x - 0)$.

$$y = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$$

La courbe traverse cette tangente en I .

Points clés attendus pour l'exercice 2

- **Q1** : limites par composition et quotient, deux asymptotes avec leurs équations.
- **Q2** : dérivabilité justifiée, formule $\left(\frac{1}{u}\right)'$ citée, signe justifié.
- **Q3** : l'identité est démontrée en partant d'un membre ; la conclusion sur le centre de symétrie utilise le milieu de deux points symétriques.
- **Q4** : f'' calculée avec soin, le signe de $e^{-x} - 1$ est justifié par la croissance de l'exponentielle, le point d'inflexion est donné avec ses coordonnées.
- **Q5** : $f(0)$ et $f'(0)$ calculés avant d'écrire l'équation.

Exercice 3 : une tangente, un triangle et une aire maximale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}$.

Pour tout réel $a > 0$, on note A le point de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisse a , et T_a la tangente à $\mathcal{C}$ en A .

La droite T_a coupe l'axe des abscisses en M et l'axe des ordonnées en N .

On note $S(a)$ l'aire du triangle OMN , où O est l'origine du repère.

1. Montrer que T_a a pour équation $y = e^{-a}(1 + a - x)$.
2. Déterminer les coordonnées de M et de N .
3. Montrer que $S(a) = \frac{1}{2}(1 + a)^2 e^{-a}$.
4. Étudier les variations de S sur $]0; +\infty[$. En déduire la valeur de a pour laquelle l'aire est maximale, et cette aire maximale.
5. Justifier que la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de chacune de ses tangentes.

Correction de la question 1

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -e^{-x}$. Le point A a pour coordonnées $(a; e^{-a})$, et $f'(a) = -e^{-a}$.

La tangente T_a a pour équation :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) = e^{-a} - e^{-a}(x - a) = e^{-a}(1 - x + a)$$

Donc $T_a : y = e^{-a}(1 + a - x)$.

Correction de la question 2

Le point M . C'est l'intersection de T_a avec l'axe des abscisses ($y = 0$) : $e^{-a}(1 + a - x) = 0$.
Comme $e^{-a} \neq 0$, cela équivaut à $x = 1 + a$.

$$M(1 + a; 0)$$

Le point N . C'est l'intersection de T_a avec l'axe des ordonnées ($x = 0$) : $y = e^{-a}(1 + a)$.

$$N(0; (1 + a)e^{-a})$$

Correction de la question 3

Comme $a > 0$, M est sur la demi-droite des abscisses positives et N sur celle des ordonnées positives. Le triangle OMN est rectangle en O . Son aire vaut $\frac{1}{2} \times OM \times ON = \frac{1}{2} \times (1 + a) \times (1 + a)e^{-a}$.

$$\text{Donc } S(a) = \frac{1}{2}(1 + a)^2 e^{-a}.$$

Correction de la question 4

La fonction S est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produit. Avec $u(a) = (1 + a)^2$, $u'(a) = 2(1 + a)$, $v(a) = e^{-a}$, $v'(a) = -e^{-a}$:

$$S'(a) = \frac{1}{2} [2(1 + a)e^{-a} - (1 + a)^2 e^{-a}] = \frac{1}{2} e^{-a}(1 + a) [2 - (1 + a)]$$

$$S'(a) = \frac{1}{2}(1 + a)(1 - a)e^{-a}$$

Pour $a > 0$, $\frac{1}{2}$, $(1 + a)$ et e^{-a} sont strictement positifs, donc $S'(a)$ est du signe de $1 - a$. $S' > 0$ sur $]0; 1[$, $S'(1) = 0$ et $S' < 0$ sur $]1; +\infty[$. Donc S est strictement croissante sur $]0; 1]$ et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

Conclusion. L'aire est maximale pour $a = 1$, et vaut $S(1) = \frac{1}{2} \times 4 \times e^{-1}$.

L'aire maximale est $\frac{2}{e} \approx 0,74$, atteinte pour $a = 1$.

Correction de la question 5

La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) = e^{-x} > 0$.

Donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.

Sa courbe est au-dessus de chacune de ses tangentes, en particulier de T_a : pour tout x , $e^{-x} \geq e^{-a}(1 + a - x)$.

Points clés attendus pour l'exercice 3

- **Q1** : la formule de la tangente est écrite avec $f(a)$ et $f'(a)$ calculés.
- **Q2 et Q3** : les coordonnées de M et N sont obtenues en résolvant $y = 0$ puis $x = 0$, et l'aire est justifiée par le triangle rectangle en O .
- **Q4** : dérivation d'un produit citée, factorisation, signe justifié, conclusion **en contexte** : valeur de a et valeur de l'aire.
- **Q5** : la convexité est justifiée par $f'' > 0$, et le lien avec les tangentes est énoncé.

Les réflexes à retenir

- Une étude de fonction commence par les **limites**, puis la **dérivée factorisée**, puis le **tableau complet**.
- Avant de dériver, **justifie la dérivabilité** ; avant un signe, justifie chaque facteur ($e^{-x} > 0$, carré, trinôme).
- Pour la convexité, calcule f'' avec soin et factorise : l'erreur la plus fréquente est un facteur oublié.
- Une équation à solution unique combine le **corollaire du TVI** et le tableau de variations.
- Un **problème d'optimisation** se termine par une conclusion en contexte, avec la valeur maximale.

Aller plus loin avec les vrais sujets

Quand tu es à l'aise avec ce chapitre, entraîne-toi sur les études de fonctions des sujets officiels des années précédentes.

Ils sont disponibles sur le site de l'[APMEP](https://apmep.fr/).

Chronomètre-toi et rédige comme le jour du bac.