

Contrôle : chapitre 4, Dérivation et convexité

Durée : 60 minutes. **Calculatrice** : autorisée. **Barème** : 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (5 points) : Dérivées et tangente

Dans cet exercice, les fonctions g et h sont définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ et $h(x) = (x + 2)e^{-2x+1}$.

1. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$. (1,5 points)
2. Justifier que h est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis montrer que, pour tout réel x , $h'(x) = -(2x + 3)e^{-2x+1}$. (1,5 points)
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de h au point d'abscisse 0. (2 points)

Exercice 2 (8 points) : Étude d'une fonction et de sa convexité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Montrer que f est impaire. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}$? (1 point)
2. Pour $x > 0$, on pose $X = \frac{x^2}{2}$. Exprimer $f(x)$ à l'aide de x , X et e^{-X} , puis déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Interpréter graphiquement. (1,5 points)
3. Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = (1 - x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$, puis dresser le tableau de variations complet de f (limites et valeurs en ± 1). (2,5 points)
4. Montrer que, pour tout réel x , $f''(x) = x(x^2 - 3)e^{-\frac{x^2}{2}}$. Étudier ensuite la convexité de f et déterminer les points d'inflexion de $\mathcal{C}$ (coordonnées exactes). (3 points)

Exercice 3 (3 points) : Une inégalité par convexité

1. Justifier que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$. En déduire que, pour tout réel x , $e^x \geq x + 1$. (1,5 points)
2. Soit n un entier naturel non nul. En appliquant l'inégalité précédente à un réel bien choisi, montrer que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$. (1,5 points)

Exercice 4 (4 points) : Une boîte de volume maximal

On dispose d'une feuille de carton carrée de 24 cm de côté. On découpe dans chaque coin un carré de côté x cm, avec $0 < x < 12$, puis on replie les bords pour obtenir une boîte sans couvercle, de forme pavé droit. On note $V(x)$ son volume en cm^3 . La question 4 utilise le script Python suivant :

```
def V(x):  
    return x*(24-2*x)**2  
  
best = 0  
xbest = 0  
for k in range(1, 120):  
    x = k/10  
    if V(x) > best:  
        best = V(x)  
        xbest = x  
print(xbest, best)
```

1. Montrer que $V(x) = x(24 - 2x)^2$. (0,5 point)
2. Montrer que, pour tout $x \in]0; 12[$, $V'(x) = 12(x - 4)(x - 12)$. (1 point)
3. Dresser le tableau de variations de V sur $]0; 12[$. En déduire la valeur de x pour laquelle le volume est maximal et ce volume maximal. (1,5 points)
4. On exécute le script. Quelle est la sortie affichée ? Est-elle cohérente avec la question précédente ? Justifier. (1 point)