

Contrôle : chapitre 4, Dérivation et convexité

Durée : 60 minutes. **Calculatrice** : autorisée. **Barème** : 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (5 points) : Dérivées et tangente

Dans cet exercice, les fonctions g et h sont définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ et $h(x) = (x + 2)e^{-2x+1}$.

1. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$. (1,5 points)
2. Justifier que h est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis montrer que, pour tout réel x , $h'(x) = -(2x + 3)e^{-2x+1}$. (1,5 points)
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de h au point d'abscisse 0. (2 points)

Correction de l'exercice 1, question 1

Question 1 (1,5 points)

Pour tout réel x , $x^2 + 3 > 0$: la fonction $g = \sqrt{u}$, avec $u(x) = x^2 + 3$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de u (dérivable, strictement positive) et de la racine carrée.

On utilise $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u'(x) = 2x$:

$$g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}.$$

Barème : 0,5 point pour la justification de la dérivabilité ($u > 0$) ; 1 point pour la formule et le résultat simplifié.

Correction de l'exercice 1, question 2

Question 2 (1,5 points)

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de $x \mapsto x + 2$ et de $x \mapsto e^{-2x+1}$, dérivables sur $\mathbb{R}$.

On pose $u(x) = x + 2$ et $v(x) = e^{-2x+1}$: $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -2e^{-2x+1}$. Avec $(uv)' = u'v + uv'$:

$$h'(x) = e^{-2x+1} - 2(x + 2)e^{-2x+1} = e^{-2x+1}(1 - 2x - 4)$$

$$h'(x) = -(2x + 3)e^{-2x+1}.$$

Barème : 0,5 point pour v' correcte (dérivée de la composée) ; 0,5 point pour la formule du produit appliquée ; 0,5 point pour la factorisation.

Correction de l'exercice 1, question 3

Question 3 (2 points)

La tangente en 0 a pour équation $y = h(0) + h'(0)(x - 0)$.

$$h(0) = 2e \text{ et } h'(0) = -3e.$$

$$T : y = -3ex + 2e, \text{ soit } y = e(2 - 3x).$$

Barème : 0,5 point pour la formule de la tangente ; 0,5 point pour $h(0)$; 0,5 point pour $h'(0)$; 0,5 point pour l'équation finale.

Exercice 2 (8 points) : Étude d'une fonction et de sa convexité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Montrer que f est impaire. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}$? (1 point)
2. Pour $x > 0$, on pose $X = \frac{x^2}{2}$. Exprimer $f(x)$ à l'aide de x , X et e^{-X} , puis déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Interpréter graphiquement. (1,5 points)
3. Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = (1 - x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$, puis dresser le tableau de variations complet de f (limites et valeurs en ± 1). (2,5 points)
4. Montrer que, pour tout réel x , $f''(x) = x(x^2 - 3)e^{-\frac{x^2}{2}}$. Étudier ensuite la convexité de f et déterminer les points d'inflexion de $\mathcal{C}$ (coordonnées exactes). (3 points)

Correction de l'exercice 2, question 1

Question 1 (1 point)

L'ensemble $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et, pour tout réel x : $f(-x) = -xe^{-\frac{(-x)^2}{2}} = -xe^{-\frac{x^2}{2}} = -f(x)$.

f est impaire : $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Barème : 0,5 point pour $f(-x) = -f(x)$ établi ; 0,5 point pour la symétrie de $\mathcal{C}$.

Correction de l'exercice 2, question 2

Question 2 (1,5 points)

Pour $x > 0$: $f(x) = x e^{-x} = \frac{2}{x} \times \frac{x^2}{2} e^{-x} = \frac{2}{x} \times X e^{-X}$.

Quand $x \rightarrow +\infty$, $\frac{2}{x} \rightarrow 0$ et $X \rightarrow +\infty$, donc $X e^{-X} \rightarrow 0$ par croissances comparées. Par produit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Par imparité de f , $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Barème : 0,5 point pour l'écriture $f(x) = \frac{2}{x} \times X e^{-X}$; 0,5 point pour la limite en $+\infty$ avec croissances comparées ; 0,5 point pour la limite en $-\infty$ et l'asymptote.

Correction de l'exercice 2, question 3

Question 3 (2,5 points)

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de $x \mapsto x$ et de $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$, composée de fonctions dérivables. On a $\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = -x e^{-\frac{x^2}{2}}$.

$$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} + x \times \left(-x e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = (1 - x^2) e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Comme $e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$, trinôme de coefficient dominant négatif et de racines -1 et 1 : négatif sur $] -\infty ; -1[$, positif sur $] -1 ; 1[$, négatif sur $]1 ; +\infty[$.

$$f(1) = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,61 \text{ et } f(-1) = -e^{-\frac{1}{2}} \approx -0,61.$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$-e^{-1/2}$	$\nearrow$	$e^{-1/2}$	$\searrow$	0

Barème : 1 point pour f' calculée et factorisée ; 0,5 point pour le signe de f' justifié ; 1 point pour le tableau (variations, limites, valeurs en ± 1).

Correction de l'exercice 2, question 4

Question 4 (3 points)

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ (produit de fonctions dérivables), donc f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Avec $f'(x) = (1 - x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$: $f''(x) = -2xe^{-\frac{x^2}{2}} + (1 - x^2) \times (-xe^{-\frac{x^2}{2}}) = (-2x - x + x^3)e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Donc $f''(x) = x(x^2 - 3)e^{-\frac{x^2}{2}}$, qui est du signe de $x(x^2 - 3) = x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$ puisque l'exponentielle est strictement positive.

Signes : sur $]-\infty; -\sqrt{3}[$, $x < 0$ et $x^2 - 3 > 0$ donc $f'' < 0$; sur $]-\sqrt{3}; 0[$, $x < 0$ et $x^2 - 3 < 0$ donc $f'' > 0$; sur $]0; \sqrt{3}[$, $x > 0$ et $x^2 - 3 < 0$ donc $f'' < 0$; sur $]\sqrt{3}; +\infty[$, $x > 0$ et $x^2 - 3 > 0$ donc $f'' > 0$.

Ainsi $f'' \geq 0$ sur $[-\sqrt{3}; 0]$ et sur $[\sqrt{3}; +\infty[$, et $f'' \leq 0$ sur $]-\infty; -\sqrt{3}]$ et sur $[0; \sqrt{3}]$.

f est convexe sur $[-\sqrt{3}; 0]$ et sur $[\sqrt{3}; +\infty[$, et concave sur $]-\infty; -\sqrt{3}]$ et sur $[0; \sqrt{3}]$.

f'' s'annule en changeant de signe en $-\sqrt{3}$, en 0 et en $\sqrt{3}$: $\mathcal{C}$ admet trois points d'inflexion.

Avec $f(0) = 0$ et $f(\pm\sqrt{3}) = \pm\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}$:

$A(-\sqrt{3}; -\sqrt{3}e^{-3/2})$, $O(0; 0)$ et $B(\sqrt{3}; \sqrt{3}e^{-3/2})$.

Barème : 1 point pour f'' calculée et factorisée ; 1 point pour le signe de f'' et la convexité ; 1 point pour les trois points d'inflexion avec leurs deux coordonnées.

Exercice 3 (3 points) : Une inégalité par convexité

- Justifier que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$. En déduire que, pour tout réel x , $e^x \geq x + 1$. (1,5 points)
- Soit n un entier naturel non nul. En appliquant l'inégalité précédente à un réel bien choisi, montrer que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$. (1,5 points)

Correction de l'exercice 3, question 1

Question 1 (1,5 points)

La fonction $\exp$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp'' = \exp > 0$: elle est donc convexe sur $\mathbb{R}$.

Sa courbe est donc au-dessus de chacune de ses tangentes, en particulier de la tangente en 0, d'équation $y = e^0 + e^0(x - 0) = x + 1$.

Pour tout réel x , $e^x \geq x + 1$.

Barème : 0,5 point pour $\exp'' = \exp > 0$ donc convexe ; 0,5 point pour l'équation de la tangente en 0 ; 0,5 point pour la position courbe/tangente et la conclusion.

Correction de l'exercice 3, question 2

Question 2 (1,5 points)

On applique l'inégalité avec $x = \frac{1}{n} : e^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{1}{n} > 0$.

La fonction $t \mapsto t^n$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$: on élève les deux membres, positifs, à la puissance n :

$$\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \text{ avec } \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n = e^{\frac{n}{n}} = e.$$

Pour tout $n \geq 1$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$.

Barème : 0,5 point pour le choix $x = \frac{1}{n}$; 0,5 point pour le passage à la puissance n justifié (positivité, croissance) ; 0,5 point pour $(e^{1/n})^n = e$ et la conclusion.

Exercice 4 (4 points) : Une boîte de volume maximal

On dispose d'une feuille de carton carrée de 24 cm de côté. On découpe dans chaque coin un carré de côté x cm, avec $0 < x < 12$, puis on replie les bords pour obtenir une boîte sans couvercle, de forme pavé droit. On note $V(x)$ son volume en cm^3 . La question 4 utilise le script Python suivant :

```
def V(x):
    return x*(24-2*x)**2

best = 0
xbest = 0
for k in range(1, 120):
    x = k/10
    if V(x) > best:
        best = V(x)
        xbest = x
print(xbest, best)
```

1. Montrer que $V(x) = x(24 - 2x)^2$. (0,5 point)
2. Montrer que, pour tout $x \in]0; 12[$, $V'(x) = 12(x - 4)(x - 12)$. (1 point)
3. Dresser le tableau de variations de V sur $]0; 12[$. En déduire la valeur de x pour laquelle le volume est maximal et ce volume maximal. (1,5 points)
4. On exécute le script. Quelle est la sortie affichée ? Est-elle cohérente avec la question précédente ? Justifier. (1 point)

Correction de l'exercice 4, question 1

Question 1 (0,5 point)

Le fond de la boîte est un carré de côté $24 - 2x$ (cm) et sa hauteur est x (cm).

Donc $V(x) = x(24 - 2x)^2$.

Barème : 0,5 point pour le côté du fond $24 - 2x$ et la hauteur x .

Correction de l'exercice 4, question 2

Question 2 (1 point)

$V(x) = 4x^3 - 96x^2 + 576x$, polynôme dérivable sur $]0; 12[$.

$V'(x) = 12x^2 - 192x + 576 = 12(x^2 - 16x + 48)$.

Or $(x - 4)(x - 12) = x^2 - 16x + 48$, donc $V'(x) = 12(x - 4)(x - 12)$.

Barème : 0,5 point pour V' calculée ; 0,5 point pour la factorisation vérifiée.

Correction de l'exercice 4, question 3

Question 3 (1,5 points)

Sur $]0; 12[$, $x - 12 < 0$; donc $V'(x)$ est du signe de $-(x - 4)$: $V'(x) > 0$ sur $]0; 4[$, $V'(4) = 0$ et $V'(x) < 0$ sur $]4; 12[$.

$V(4) = 4 \times 16^2 = 1024$; de plus $V(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$ et quand $x \rightarrow 12$.

x	0		4		12
$f'(x)$		+	0	-	
f	0	↗	1024	↘	0

Le volume est maximal pour $x = 4$ cm et vaut 1024 cm^3 (soit environ 1,02 litre).

Barème : 0,5 point pour le signe de V' justifié ; 0,5 point pour le tableau ; 0,5 point pour la conclusion en contexte avec unités.

Correction de l'exercice 4, question 4

Question 4 (1 point)

Le script parcourt les valeurs $x = 0,1 ; 0,2 ; \dots ; 11,9$ et mémorise la plus grande valeur de $V(x)$ rencontrée ainsi que l'abscisse correspondante.

Il affiche **4.0 1024.0**.

Ce résultat est cohérent avec le tableau de variations : le maximum de V est atteint en $x = 4$, valeur qui figure parmi les valeurs testées (pas de 0,1), et il vaut 1024.

Barème : 0,5 point pour la sortie 4.0 1024.0 ; 0,5 point pour la comparaison avec le maximum trouvé (valeur de x testée).

Récapitulatif du barème

Exercice	Points
Exercice 1	5
Exercice 2	8
Exercice 3	3
Exercice 4	4
Total	20