

Guide de rédaction : continuité et TVI

Ce guide complète le Guide de rédaction général.

Il rassemble, pour le chapitre Continuité et TVI, les **treize situations qui reviennent au bac** et, pour chacune, la rédaction modèle.

Dans ce chapitre, la rédaction est presque tout : le théorème est toujours le même, ce sont les hypothèses écrites qui rapportent les points.

Le principe du chapitre

Avec la continuité et le TVI, un correcteur regarde surtout **cinq choses** :

- la **continuité justifiée** (et non seulement affirmée) ;
- la **stricte monotonie** quand on veut l'unicité ;
- les **valeurs ou limites aux bornes** ;
- la vérification que **k est compris entre elles** ;
- le **nom du théorème** dans la conclusion.

1. Les treize situations et leur rédaction modèle

Situation 1 : continuité en un point d'une fonction par morceaux ($f(x) = x^2 + 1$ si $x < 0$, $f(x) = 2x + 1$ si $x \geq 0$).

« On calcule les trois nombres en 0. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0^2 + 1 = 1$. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 \times 0 + 1 = 1$. $f(0) = 1$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, la fonction f est continue en 0. »

Si les nombres diffèrent : « Comme $\lim_{x \rightarrow 0^-} f \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f$, f n'a pas de limite en 0 : elle n'est pas continue en 0. »

Situation 2 : déterminer un paramètre.

« $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2a + 1$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$ et $f(2) = 3$. La fonction f est continue en 2 si et seulement si $2a + 1 = 3$, c'est-à-dire $a = 1$. »

« Si et seulement si » : le paramètre est une **condition nécessaire et suffisante**.

Situation 3 : prolongement par continuité.

« La fonction f n'est pas définie en 3. Pour $x \neq 3$, $f(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3$, donc

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$. La limite est finie : f se prolonge par continuité en 3 en posant $f(3) = 6$. »

Situation 4 : justifier qu'une fonction est continue.

« La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme, produit et composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$. »

Ou : « La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $\mathbb{R}$. »

Pour un quotient : « ... comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur I . »

Cette phrase est **obligatoire** avant d'appliquer le TVI. C'est l'hypothèse la plus souvent oubliée.

Situation 5 : continuité et dérivabilité.

« Toute fonction dérivable en a est continue en a . La réciproque est fausse : la fonction valeur absolue est continue en 0 , mais son taux d'accroissement vaut -1 pour $x < 0$ et 1 pour $x > 0$: elle n'est pas dérivable en 0 . »

Situation 6 : le TVI, existence d'une solution ($f(x) = x^3 + x - 1$ sur $[0; 1]$).

« La fonction f est continue sur $[0; 1]$, car c'est un polynôme.

De plus $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$, donc 0 est compris entre $f(0)$ et $f(1)$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[0; 1]$. »

Situation 7 : le corollaire, existence et unicité.

« La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue.

Pour tout x , $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, donc f est strictement croissante sur $[0; 1]$.

De plus $f(0) = -1 < 0 < 1 = f(1)$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; 1]$. »

Quatre éléments à écrire, toujours dans cet ordre : **continuité, stricte monotonie, valeurs aux bornes, conclusion.**

Situation 8 : le corollaire avec limites (intervalle ouvert ou infini).

« La fonction h est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} h = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h = +\infty$.

Le nombre 0 est strictement compris entre ces limites.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$. »

Sur un intervalle ouvert, on écrit « k est **strictement** compris entre les limites ». »

Situation 9 : plusieurs solutions ($f(x) = x^3 - 3x + 1$).

« D'après le tableau de variations, f est strictement croissante sur $] -\infty ; -1]$, strictement décroissante sur $[-1 ; 1]$ et strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$.

Sur chacun de ces intervalles, f est continue et strictement monotone, et 0 est compris entre les valeurs aux bornes.

D'après le corollaire, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur chacun d'eux.

Comme $f(-1) \neq 0$ et $f(1) \neq 0$, ces trois solutions sont distinctes.

L'équation admet donc exactement trois solutions. »

Situation 10 : équation $f(x) = g(x)$ et point fixe.

« Résoudre $e^x = 2 - x$ revient à résoudre $h(x) = 0$, avec $h(x) = e^x + x - 2$. »

Pour un point fixe : « Soit $g(x) = f(x) - x$.

La fonction g est continue comme différence de fonctions continues. $g(0) = f(0) \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$.

D'après le TVI, il existe $c \in [0 ; 1]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c) = c$. »

Situation 11 : encadrer une solution.

« On a $f(0,68) \approx -0,0056 < 0$ et $f(0,69) \approx 0,0185 > 0$. Comme f est strictement croissante sur $[0 ; 1]$, $0,68 < \alpha < 0,69$. »

Donne les **deux valeurs de f** avec leur signe et rappelle le **sens de variation**. Un encadrement sans justification ne rapporte rien.

Situation 12 : suites, continuité et unicité.

« La suite (u_n) converge vers ℓ , avec $\ell \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

La fonction $\varphi : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

En passant à la limite dans $u_{n+1} = \varphi(u_n)$, on obtient $\ell = \frac{1}{1+\ell^2}$, soit $\ell^3 + \ell - 1 = 0$.

Comme $\ell \in [0; 1]$ et que α est l'**unique** solution de cette équation dans $[0; 1]$, $\ell = \alpha$. »

Situation 13 : vrai/faux et contre-exemple.

« L'affirmation est **fausse**.

Contre-exemple : $f(x) = (2x-1)(x-1)(2x-3)$ est continue sur $[0; 2]$, $f(0) = -3$ et $f(2) = 3$, mais f s'annule trois fois (en $\frac{1}{2}$, 1 et $\frac{3}{2}$).

Le TVI donne l'existence, pas l'unicité. »

2. Avant / après sur la continuité et le TVI**a) Le TVI.**

« $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$, donc f s'annule (TVI). »

« La fonction f est continue sur $[0; 1]$ (justification). $f(0) = -1 < 0 < 1 = f(1)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[0; 1]$. »

Ce qui manque à la première : la continuité, l'intervalle, l'énoncé de la conclusion.

b) L'unicité.

« f est continue et $f(0) < 0 < f(1)$, donc il y a une unique solution. »

« f est continue et **strictement croissante** sur $[0; 1]$ (car $f'(x) > 0$), et $f(0) < 0 < f(1)$. D'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet une **unique** solution dans $[0; 1]$. »

Ce qui manque à la première : la stricte monotonie. Sans elle, on n'a que l'existence.

c) Un encadrement.

« À la calculatrice, $\alpha \approx 0,68$. »

« $f(0,68) \approx -0,0056 < 0$ et $f(0,69) \approx 0,0185 > 0$. Comme f est strictement croissante, $0,68 < \alpha < 0,69$. »

d) Un paramètre.

« Pour que f soit continue, il faut que $a = 1$. »

« $\lim_{x \rightarrow 2^-} f = 2a + 1$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f = 3 = f(2)$. f est continue en 2 si et seulement si $2a + 1 = 3$, soit $a = 1$. »

3. Les erreurs de rédaction propres à ce chapitre

- Appliquer le TVI sans justifier la **continuité**.
- Conclure à l'**unicité** sans avoir prouvé la stricte monotonie.
- Appliquer le corollaire sur un intervalle où f **n'est pas monotone**.
- Oublier de vérifier que k est **compris entre** $f(a)$ et $f(b)$ (ou entre les limites).
- Ne pas préciser l'**intervalle** où se trouve la solution.
- Donner un encadrement sans les valeurs de f qui le justifient.
- Confondre une limite qui existe et la **continuité** (il faut $\lim = f(a)$).
- Écrire « continue donc dérivable ».
- Passer à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$ sans avoir justifié la **convergence** et la **continuité** de f .

4. La check-list du chapitre Continuité et TVI

- J'ai écrit **pourquoi** f est continue sur l'intervalle.
- Pour l'unicité, j'ai écrit **pourquoi** f est **strictement monotone** (signe de f').
- J'ai donné les **valeurs ou limites aux bornes** et vérifié que k est **compris entre elles**.
- Ma conclusion contient le **nom du théorème** (« théorème des valeurs intermédiaires » ou « corollaire ») et l'**intervalle**.
- Pour plusieurs solutions, j'ai appliqué le corollaire **sur chaque intervalle de monotonie** et compté les solutions.
- Mon encadrement donne **deux valeurs de** f avec leur signe.
- Pour une suite, j'ai justifié la **convergence**, la **continuité** et, si besoin, l'**unicité** pour identifier la limite.

Le TVI est un théorème très poli : il ne s'applique que si tu as vérifié ses hypothèses. Sinon, il quitte discrètement la copie, et les points avec lui.