

Continuité et TVI

Nom : _____

Fiche Standard

Date : _____

Exercice S1 : Fonction définie par trois morceaux

Soient a et b deux réels. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ b\sqrt{x} - 1 & \text{si } x > 4. \end{cases}$$

1. Déterminer a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.
2. On prend désormais $a = 2$ et $b = 2$. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et préciser ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Déterminer, en justifiant, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$, puis celui de l'équation $f(x) = 5$. Donner ces solutions.

Exercice S2 : Une équation avec l'exponentielle

On considère l'équation $(E) : x e^x = 2$ et la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x e^x - 2$.

1. Calculer $h'(x)$ et dresser le tableau de variations de h sur $[-1; +\infty[$. On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.
2. Montrer que l'équation (E) n'a pas de solution dans $] -\infty; -1]$.
3. En déduire que (E) admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, puis que $\alpha \in]0; 1[$.
4. Donner un encadrement de α d'amplitude 0,01.

Exercice S3 : Combien de solutions selon m ?

Soit $f(x) = x^3 - 3x$ et m un réel.

1. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ (limites comprises).
2. Discuter, selon les valeurs de m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet exactement trois solutions $\alpha < \beta < \gamma$, puis que $1,8 < \gamma < 1,9$.

Exercice S4 : Suite définie par une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$ et (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que f est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$, et que $f(x) - x = \frac{3-x^2}{x+2}$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier n , $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$.
3. Montrer que (u_n) est croissante, puis qu'elle converge.
4. Déterminer sa limite ℓ . On précisera à quel moment la continuité de f est utilisée.

Exercice S5 : Un point fixe

1. Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$ à valeurs dans $[0; 1]$. On pose $g(x) = f(x) - x$. Déterminer le signe de $g(0)$ et de $g(1)$, puis montrer qu'il existe $c \in [0; 1]$ tel que $f(c) = c$.
2. Application : $f(x) = \cos x$. Vérifier que f est à valeurs dans $[0; 1]$ lorsque $x \in [0; 1]$, puis montrer que l'équation $\cos x = x$ admet une unique solution α dans $[0; 1]$.
3. Justifier que $0,73 < \alpha < 0,74$.

Exercice S6 : Dichotomie en Python

Soit $h(x) = x e^x - 2$, strictement croissante sur $[0; 1]$, avec $h(0) < 0 < h(1)$. On exécute le programme suivant, qui renvoie un encadrement de la solution α de $h(x) = 0$ et le nombre d'étapes effectuées.

```

from math import exp

def h(x):
    return x * exp(x) - 2

def dichotomie(a, b, e):
    n = 0
    while b - a > e:
        m = (a + b) / 2
        if h(m) * h(a) <= 0:
            b = m
        else:
            a = m
        n = n + 1
    return a, b, n

```

1. Déterminer, à la calculatrice, le résultat de `dichotomie(0, 1, 0.1)` en détaillant chaque étape (valeurs de a , b , m et signe de $h(m)h(a)$).
2. Combien d'étapes effectue `dichotomie(0, 1, 0.01)` ? Quel est le résultat renvoyé ?
3. Justifier que le test $h(m) * h(a) \leq 0$ indique bien dans quelle moitié de $[a; b]$ se trouve α .

Exercice S7 : Concentration d'un médicament

Après injection, la concentration (en mg/L) d'un médicament dans le sang à l'instant t (en heures, $t \geq 0$) est modélisée par $C(t) = 5te^{-t/2}$. Le médicament est efficace lorsque la concentration est supérieure ou égale à 3 mg/L.

1. Étudier les variations de C sur $[0; +\infty[$. Justifier que $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = 0$ (poser $X = t/2$).
2. Montrer qu'il existe exactement deux instants $t_1 < t_2$ où la concentration vaut 3 mg/L.
3. Justifier que $0,97 < t_1 < 0,98$ et $3,5 < t_2 < 3,6$.
4. En déduire un encadrement de la durée pendant laquelle le médicament est efficace.

Exercice S8 : Valeur absolue : continue mais pas dérivable

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$.

1. Factoriser $x^2 - 4x + 3$ et écrire $f(x)$ sans valeur absolue sur chacun des intervalles $] -\infty; 1]$, $[1; 3]$ et $[3; +\infty[$.
2. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$, puis retrouver ce résultat en 1 et en 3 en calculant les limites à gauche et à droite.
3. Montrer que f n'est pas dérivable en 1 (limites à gauche et à droite du taux d'accroissement). Interpréter graphiquement. Que montre cet exemple ?
4. Étudier les variations de f sur chacun des intervalles $] -\infty; 1]$, $[1; 2]$, $[2; 3]$ et $[3; +\infty[$ (on pourra utiliser le sommet de la parabole).
5. Discuter, selon les valeurs du réel k , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$. Résoudre l'équation $f(x) = 1$.

Exercice S9 : Intersection de deux courbes

Soient $f(x) = e^x$ et $g(x) = x + 2$. On pose $d(x) = f(x) - g(x)$ pour tout réel x .

1. Étudier les variations de d et préciser ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$ (on admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} d(x) = +\infty$).
2. En déduire que les courbes de f et de g ont exactement deux points communs, d'abscisses $\alpha < 0 < \beta$.
3. Donner un encadrement d'amplitude 0,01 de α et de β .