

Corrigé : Continuité et TVI

Fiche Standard

S1.

1. Sur $] -\infty ; 1[$, sur $]1 ; 4[$ et sur $]4 ; +\infty[$, f est continue (polynôme, constante, fonction racine carrée composée avec une fonction affine). Il reste à étudier les points 1 et 4.

En 1 : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 + a$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 = f(1)$. La continuité équivaut à $1 + a = 3$, soit $a = 2$.

En 4 : $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 3 = f(4)$ et $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = b\sqrt{4} - 1 = 2b - 1$. La continuité équivaut à $2b - 1 = 3$, soit $b = 2$.

Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a = 2$ et $b = 2$.

2. Sur $] -\infty ; 1[$: $f(x) = x^2 + 2x$ et $f'(x) = 2x + 2$, négative pour $x < -1$, positive pour $x > -1$. Sur $]4 ; +\infty[$: $f(x) = 2\sqrt{x} - 1$ et $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$. Sur $]1 ; 4[$, f est constante égale à 3. Comme f est continue en 1 et en 4, on peut recoller les intervalles :

- f est strictement décroissante sur $] -\infty ; -1]$, avec $f(-1) = -1$;
- f est strictement croissante sur $[-1 ; 1]$ (de -1 à 3) ;
- f est constante, égale à 3, sur $]1 ; 4[$;
- f est strictement croissante sur $[4 ; +\infty[$.

Limites : $x^2 + 2x = x(x + 2) \rightarrow +\infty$ en $-\infty$, et $2\sqrt{x} - 1 \rightarrow +\infty$ en $+\infty$.

3. Équation $f(x) = 0$. Sur $] -\infty ; -1]$, f est continue, strictement décroissante, de limite $+\infty$ à $f(-1) = -1$: comme $0 \in]-1 ; +\infty[$, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires donne une unique solution. Sur $[-1 ; 1]$, f est continue, strictement croissante, de -1 à 3 : une unique solution. Sur $]1 ; +\infty[$, $f \geq 3 > 0$: aucune solution. Les deux solutions sont distinctes car $f(-1) \neq 0$. Elles se calculent : $x^2 + 2x = 0$ donne $x = -2$ ou $x = 0$, tous deux < 1 .

Conclusion : $f(x) = 0$ a deux solutions, -2 et 0 .

Équation $f(x) = 5$. Sur $] -\infty ; -1]$: $5 \in [-1 ; +\infty[$, une unique solution. Sur $[-1 ; 1]$: $f \leq 3$, aucune. Sur $]1 ; 4]$: $f = 3$, aucune. Sur $[4 ; +\infty[$: f strictement croissante de 3 à $+\infty$, une unique solution. Calcul : $x^2 + 2x = 5$ avec $x \leq -1$ donne $x = -1 - \sqrt{6}$ (l'autre racine $-1 + \sqrt{6} \approx 1,45$ n'est pas dans $] -\infty ; 1[$) ; $2\sqrt{x} - 1 = 5$ donne $x = 9$.

Conclusion : $f(x) = 5$ a deux solutions, $-1 - \sqrt{6}$ et 9.

S2.

1. $h'(x) = e^x + xe^x = (x + 1)e^x \geq 0$ sur $[-1 ; +\infty[$, nulle seulement en -1 . Donc h est strictement croissante sur $[-1 ; +\infty[$, et $h(-1) = -e^{-1} - 2$.

x	-1	$+\infty$
$h'(x)$	0	+
$h(x)$	$-2 - e^{-1}$	$+\infty$

2. Si $x \leq 0$, alors $xe^x \leq 0$ (produit d'un nombre négatif et d'un nombre strictement positif), donc $h(x) \leq -2 < 0$. Aucun réel $x \leq -1$ ne vérifie $h(x) = 0$.
3. Sur $[-1 ; +\infty[$, h est continue, strictement croissante, avec $h(-1) < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$. Comme $0 \in]h(-1) ; +\infty[$, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires donne une unique solution α dans $[-1 ; +\infty[$. Avec la question 2, c'est l'unique solution dans $\mathbb{R}$.
Ensuite $h(0) = -2 < 0$ et $h(1) = e - 2 > 0$ (car $e > 2$). Comme $h(0) < h(\alpha) < h(1)$ et que h est strictement croissante, $0 < \alpha < 1$.
4. $h(0,85) \approx -0,0113 < 0$ et $h(0,86) \approx 0,0323 > 0$. Par stricte croissance, $0,85 < \alpha < 0,86$.

S3.

1. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. On a $f(-1) = 2$ et $f(1) = -2$. En $\pm\infty : f(x) = x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2}\right)$ tend vers $\pm\infty$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

2. f est continue et strictement monotone sur chacun des intervalles $I_1 =]-\infty; -1]$ (valeurs : $]-\infty; 2]$), $I_2 = [-1; 1]$ (valeurs : $[-2; 2]$) et $I_3 = [1; +\infty[$ (valeurs : $[-2; +\infty[$). Le corollaire donne une solution unique dans chaque intervalle dont l'ensemble de valeurs contient m , aucune sinon.

m	nombre de solutions
$m < -2$	1 (dans I_1)
$m = -2$	2 ($x = -2 \in I_1$ et $x = 1$)
$-2 < m < 2$	3 (une à l'intérieur de chaque intervalle)
$m = 2$	2 ($x = -1$ et $x = 2 \in I_3$)
$m > 2$	1 (dans I_3)

Pour $m = -2 : x = 1$ est la solution commune à I_2 et I_3 ; pour $m = 2 : x = -1$ est commune à I_1 et I_2 . On a $f(-2) = -2$ et $f(2) = 2$.

3. $1 \in]-2; 2]$, donc $f(x) = 1$ a exactement trois solutions $\alpha \in]-\infty; -1]$, $\beta \in]-1; 1]$, $\gamma \in [1; +\infty[$. Sur I_3 , f est strictement croissante, $f(1,8) = 0,432 < 1$ et $f(1,9) = 1,159 > 1$: donc $1,8 < \gamma < 1,9$.

S4.

1. f est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$: elle y est continue.

$$f'(x) = \frac{2(x+2) - (2x+3)}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2} > 0 : f \text{ est strictement croissante. Enfin } f(x) - x = \frac{2x+3 - x(x+2)}{x+2} = \frac{3-x^2}{x+2}.$$

2. Initialisation : $u_0 = 1$ et $1 \leq 1 \leq \sqrt{3}$.

Hérédité : si $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$, la croissance de f donne $f(1) \leq u_{n+1} \leq f(\sqrt{3})$. Or $f(1) = \frac{5}{3} \geq 1$ et

$$f(\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+2} = \frac{\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}+2} = \sqrt{3}. \text{ Donc } 1 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3}.$$

Conclusion : pour tout n , $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$.

3. $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \frac{3 - u_n^2}{u_n + 2} \geq 0$ car $u_n \leq \sqrt{3}$ et $u_n + 2 > 0$. La suite est croissante et majorée par $\sqrt{3}$: elle converge vers un réel ℓ avec $1 \leq \ell \leq \sqrt{3}$.

4. f est continue en ℓ et $u_n \rightarrow \ell$, donc $u_{n+1} = f(u_n) \rightarrow f(\ell)$ (**c'est ici qu'intervient la continuité**).

Or $u_{n+1} \rightarrow \ell$. Par unicité de la limite, $\ell = f(\ell)$, donc $\frac{3 - \ell^2}{\ell + 2} = 0$, soit $\ell^2 = 3$. Comme $\ell \geq 1 > 0$:

Conclusion : $\ell = \sqrt{3}$.

S5.

1. g est continue sur $[0; 1]$ comme différence de fonctions continues. Comme $f(0) \in [0; 1]$, $g(0) = f(0) \geq 0$. Comme $f(1) \leq 1$, $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Le réel 0 est compris entre $g(1)$ et $g(0)$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0; 1]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c) = c$.

2. Sur $[0; 1] \subset [0; \pi]$, le cosinus est décroissant, donc $\cos 1 \leq \cos x \leq \cos 0 = 1$. Comme $1 < \frac{\pi}{2}$, $\cos 1 > 0$. Ainsi $\cos x \in [0; 1]$: la question 1 donne l'existence d'une solution.

Unicité : $g(x) = \cos x - x$ est dérivable, donc continue, et $g'(x) = -\sin x - 1 \leq -1 < 0$ sur $[0; 1]$ car $\sin x \geq 0$. Donc g est strictement décroissante, avec $g(0) = 1 > 0$ et $g(1) = \cos 1 - 1 < 0$. Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires donne une unique solution $\alpha \in [0; 1]$.

3. $g(0,73) \approx 0,0152 > 0$ et $g(0,74) \approx -0,0015 < 0$. Comme g est strictement décroissante, $g(0,74) < g(\alpha) = 0 < g(0,73)$ donne $0,73 < \alpha < 0,74$.

S6.

1. Au départ, $h(0) = -2 < 0$.

étape	a	b	m	$h(m)$	test et mise à jour
1	0	1	0,5	$\approx -1,176$	$h(m)h(a) > 0 : a = 0,5$
2	0,5	1	0,75	$\approx -0,412$	$h(m)h(a) > 0 : a = 0,75$
3	0,75	1	0,875	$\approx 0,099$	$h(m)h(a) < 0 : b = 0,875$
4	0,75	0,875	0,8125	$\approx -0,169$	$h(m)h(a) > 0 : a = 0,8125$

Après l'étape 4, $b - a = 0,0625 \leq 0,1$: arrêt. Résultat : $(0,8125, 0,875, 4)$.

2. Après n étapes, $b - a = \frac{1}{2^n}$. On cherche le plus petit n tel que $\frac{1}{2^n} \leq 0,01$, soit $2^n \geq 100$: comme $2^6 = 64$ et $2^7 = 128$, $n = 7$. En poursuivant : étape 5, $m = 0,84375$, $h(m) < 0$, $a = 0,84375$; étape 6, $m = 0,859375$, $h(m) > 0$, $b = 0,859375$; étape 7, $m = 0,8515625$, $h(m) < 0$, $a = 0,8515625$. Résultat : $(0,8515625, 0,859375, 7)$, donc $0,8515625 < \alpha < 0,859375$.
3. Invariant : $h(a) < 0 \leq h(b)$. Si $h(m)h(a) \leq 0$, comme $h(a) < 0$, on a $h(m) \geq 0 : h(a) < 0 \leq h(m)$ et h continue, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires la solution est dans $[a; m]$, et $b = m$ conserve l'invariant. Sinon $h(m) < 0$: la solution est dans $]m; b]$, et $a = m$ conserve l'invariant.

S7.

1. $C'(t) = 5e^{-t/2} - \frac{5t}{2}e^{-t/2} = 5\left(1 - \frac{t}{2}\right)e^{-t/2}$, positive pour $t < 2$, négative pour $t > 2$. C est strictement croissante sur $[0; 2]$ de $C(0) = 0$ à $C(2) = \frac{10}{e} \approx 3,68$, puis strictement décroissante sur $[2; +\infty[$.
Limite : avec $X = \frac{t}{2}$, $C(t) = 10Xe^{-X} = 10\frac{X}{e^X}$, qui tend vers 0 quand $X \rightarrow +\infty$ (croissance comparée).
2. $e < 3 < \frac{10}{e}$, donc $\frac{10}{e} > 3$. Sur $[0; 2]$, C est continue, strictement croissante, et $0 < 3 < \frac{10}{e}$: une unique solution $t_1 \in]0; 2[$. Sur $[2; +\infty[$, C est continue, strictement décroissante, de $\frac{10}{e}$ vers 0 en $+\infty$, et $0 < 3 < \frac{10}{e}$: une unique solution $t_2 > 2$. Ainsi $t_1 < 2 < t_2$.

Conclusion : il y a exactement deux instants où la concentration vaut 3 mg/L.

3. $C(0,97) \approx 2,986 < 3 < C(0,98) \approx 3,002$ et C est strictement croissante sur $[0; 2]$: $0,97 < t_1 < 0,98$.
 $C(3,5) \approx 3,041 > 3 > C(3,6) \approx 2,975$ et C est strictement décroissante sur $[2; +\infty[$: $3,5 < t_2 < 3,6$.
4. Par les variations de C , $C(t) \geq 3$ si et seulement si $t \in [t_1; t_2]$. La durée d'efficacité est $t_2 - t_1$, et $3,5 - 0,98 < t_2 - t_1 < 3,6 - 0,97$.

Conclusion : $2,52 < t_2 - t_1 < 2,63$: le médicament est efficace pendant une durée comprise entre 2,5 et 2,6 heures environ.

S8.

1. $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$, positif sur $] -\infty; 1] \cup [3; +\infty[$ et négatif sur $[1; 3]$. Donc $f(x) = x^2 - 4x + 3$ sur $] -\infty; 1]$ et sur $[3; +\infty[$, et $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ sur $[1; 3]$.
2. $x \mapsto x^2 - 4x + 3$ est continue sur $\mathbb{R}$ (polynôme) et la valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$: par composition, f est continue sur $\mathbb{R}$.
Vérification en 1 : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 - 4 + 3 = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1 + 4 - 3 = 0$ et $f(1) = 0$. En 3 : $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -9 + 12 - 3 = 0$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 9 - 12 + 3 = 0$ et $f(3) = 0$.

3. Pour $x < 1$: $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{(x-1)(x-3)}{x-1} = x - 3 \rightarrow -2$. Pour $1 < x < 3$: $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{-(x-1)(x-3)}{x-1} = -(x-3) \rightarrow 2$. Les limites à gauche et à droite sont différentes : f n'est pas dérivable en 1.

Graphiquement, la courbe a un point anguleux en $(1; 0)$, avec deux demi-tangentes de pentes -2 et 2 . **Conclusion** : f est continue en 1 sans y être dérivable : la réciproque de « dérivable implique continue » est fausse.

4. Le sommet de la parabole $x^2 - 4x + 3$ est en $x = 2$, et $f(2) = -4 + 8 - 3 = 1$.
- Sur $] -\infty ; 1]$: $x^2 - 4x + 3$ est décroissante ($1 < 2$), de $+\infty$ à 0.
 - Sur $[1 ; 2]$: $-x^2 + 4x - 3$ est croissante, de 0 à 1.
 - Sur $[2 ; 3]$: $-x^2 + 4x - 3$ est décroissante, de 1 à 0.
 - Sur $[3 ; +\infty[$: $x^2 - 4x + 3$ est croissante, de 0 à $+\infty$.
5. f est continue et strictement monotone sur chacun des quatre intervalles ; on applique le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires sur chacun.
- $k < 0$: aucune solution, car $f \geq 0$.
 - $k = 0$: deux solutions, $x = 1$ et $x = 3$.
 - $0 < k < 1$: k est dans l'image de chacun des quatre intervalles (privés de leurs extrémités où f vaut 0 ou 1) : **quatre solutions**.
 - $k = 1$: une solution dans $] -\infty ; 1[$, $x = 2$, et une solution dans $]3 ; +\infty[$: **trois solutions**.
 - $k > 1$: une solution sur $] -\infty ; 1[$ et une sur $]3 ; +\infty[$ (l'image de $[1 ; 3]$ est $[0 ; 1]$) : **deux solutions**.

Résolution de $f(x) = 1$: sur $] -\infty ; 1] \cup [3 ; +\infty[$, $x^2 - 4x + 2 = 0$ donne $x = 2 \pm \sqrt{2}$, soit $x \approx 0,586$ et $x \approx 3,414$, deux valeurs bien situées dans ces intervalles. Sur $[1 ; 3]$, $-x^2 + 4x - 4 = 0$ donne $-(x-2)^2 = 0$, soit $x = 2$.

Conclusion : $\mathcal{S} = \{2 - \sqrt{2} ; 2 ; 2 + \sqrt{2}\}$.

S9.

1. $d(x) = e^x - x - 2$ et $d'(x) = e^x - 1$, négative pour $x < 0$, positive pour $x > 0$. $d(0) = -1$. En $-\infty$: $e^x \rightarrow 0$ et $-x - 2 \rightarrow +\infty$, donc $d(x) \rightarrow +\infty$. En $+\infty$: $+\infty$ (admis). Donc d est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$ (de $+\infty$ à -1) et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ (de -1 à $+\infty$).
2. Les points communs ont pour abscisses les solutions de $d(x) = 0$. Sur $] -\infty ; 0]$, d est continue, strictement décroissante, et $0 \in] -1 ; +\infty[$: une unique solution $\alpha < 0$ (car $d(0) \neq 0$). Sur $[0 ; +\infty[$: de même une unique solution $\beta > 0$. **Conclusion** : exactement deux points communs, d'abscisses $\alpha < 0 < \beta$.
3. $d(-1,85) \approx 0,0072 > 0 > d(-1,84) \approx -0,0012$ et d décroît sur $] -\infty ; 0]$: $-1,85 < \alpha < -1,84$. $d(1,14) \approx -0,0132 < 0 < d(1,15) \approx 0,0082$ et d croît sur $[0 ; +\infty[$: $1,14 < \beta < 1,15$.