

Continuité et TVI**Fiche Défi**

Nom : _____

Date : _____

Exercice D1 : Démonstrations du cours

1. Démontrer que si f est dérivable en a , alors f est continue en a (écrire $f(a+h) - f(a) = h \times \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$).
2. On admet le théorème des valeurs intermédiaires. Soit f continue et strictement croissante sur $[a; b]$ et $k \in [f(a); f(b)]$. Démontrer que l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a; b]$.
3. Que devient l'énoncé si f est strictement décroissante? Le démontrer en appliquant le résultat précédent à la fonction $-f$.
4. Soit f continue et strictement croissante sur $[a; b]$. Montrer que l'ensemble des valeurs prises par f sur $[a; b]$ est exactement l'intervalle $[f(a); f(b)]$.

Exercice D2 : Une suite définie par une équation

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^3 + nx - 1$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n dans $[0; 1]$.
2. Justifier que $0,45 < u_2 < 0,46$.
3. Calculer $f_{n+1}(u_n)$ en fonction de u_n . En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$, puis montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
4. Montrer que (u_n) converge.
5. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n(n + u_n^2) = 1$. En déduire que $0 < u_n \leq \frac{1}{n}$, puis la limite de (u_n) .
6. Déterminer la limite de (nu_n) .

Exercice D3 : Cordes horizontales

Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$ telle que $f(0) = f(1)$. On pose $g(x) = f(x + \frac{1}{2}) - f(x)$ pour $x \in [0; \frac{1}{2}]$.

1. Calculer $g(\frac{1}{2})$ en fonction de $g(0)$.
2. En déduire qu'il existe $a \in [0; \frac{1}{2}]$ tel que $f(a + \frac{1}{2}) = f(a)$.
3. Application. La température $T(\theta)$ en un point de l'équateur, repéré par l'angle $\theta \in [0; 2\pi]$, est une fonction continue de θ avec $T(0) = T(2\pi)$. Montrer qu'il existe deux points diamétralement opposés de l'équateur où la température est la même.
4. Même résultat avec $\frac{1}{3}$: pour f continue sur $[0; 1]$ avec $f(0) = f(1)$, on pose $G(x) = f(x + \frac{1}{3}) - f(x)$ pour $x \in [0; \frac{2}{3}]$. Calculer $G(0) + G(\frac{1}{3}) + G(\frac{2}{3})$ et en déduire qu'il existe $a \in [0; \frac{2}{3}]$ tel que $f(a + \frac{1}{3}) = f(a)$.

Exercice D4 : Continuité, dérivabilité et équation $f(x) = k$

Soient a et b deux réels. On définit f sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^2$ si $0 \leq x \leq 1$ et $f(x) = a\sqrt{x} + b$ si $x > 1$.

1. Déterminer une relation entre a et b pour que f soit continue en 1.
2. Dans ce cas, calculer les limites en 1 des taux d'accroissement à gauche et à droite. En déduire les valeurs de a et b pour lesquelles f est dérivable en 1.

On prend désormais $a = 4$ et $b = -3$.

3. Montrer que f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et déterminer sa limite en $+\infty$.
4. Montrer que, pour tout réel $k \geq 0$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[0; +\infty[$. Résoudre cette équation pour $k = \frac{1}{4}$, puis pour $k = 5$.

Exercice D5 : Étude complète et nombre de solutions

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Montrer que $f'(x) = -(x - 3)(x + 1)e^{-x}$ et dresser le tableau de variations de f .
3. Discuter, selon les valeurs du réel k , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.
4. Vérifier que le résultat de la question 3 pour $k = 0$ est cohérent avec la résolution directe de $f(x) = 0$.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, puis que $-1,79 < \alpha < -1,78$.

Exercice D6 : Quand la dichotomie se trompe

On utilise la fonction dichotomie suivante.

```
def dichotomie(f, a, b, e):
    while b - a > e:
        m = (a + b) / 2
        if f(m) * f(a) <= 0:
            b = m
        else:
            a = m
    return a, b
```

1. On pose $f(x) = \frac{1}{x-1}$. Calculer à la main `dichotomie(f, 0, 3, 0.5)`.
2. Le résultat encadre 1. La fonction f s'annule-t-elle sur $[0; 3]$? Expliquer précisément pourquoi le théorème des valeurs intermédiaires ne s'applique pas et pourquoi l'algorithme est ici trompeur.
3. On pose $g(x) = x^2 - 2$ sur $[1; 2]$. Justifier que la dichotomie fournit un encadrement de $\sqrt{2}$, puis déterminer le nombre minimal d'étapes pour obtenir une amplitude inférieure ou égale à 10^{-10} .
4. Écrire une fonction Python `nb_etapes(a, b, e)` qui renvoie le nombre d'étapes de la dichotomie sur $[a; b]$ pour une amplitude finale inférieure ou égale à e , sans connaître la fonction f .

Exercice D7 : Racine d'un polynôme de degré 3

Soit $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ avec a, b, c réels.

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$ (factoriser par x^3).
2. En déduire que l'équation $p(x) = 0$ admet au moins une solution réelle.
3. Application : $p(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$. Étudier les variations de p et montrer que $p(x) \geq 1$ pour tout $x \geq \frac{1}{3}$.
4. En déduire que $p(x) = 0$ a une seule solution réelle r , et que $-0,5 < r < -0,4$.

Exercice D8 : La méthode de la sécante

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x - 5$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1; 2]$.
2. Soit f continue sur $[a; b]$ avec $f(a) < 0 < f(b)$. La droite passant par $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse c .
 - a) Montrer que $c = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)}$ et que $a < c < b$.
 - b) Calculer c pour $f(x) = x^3 + 2x - 5$, $a = 1$ et $b = 2$. Vérifier que $f(c) < 0$ et situer α par rapport à c .
3. La méthode de la sécante consiste à remplacer $[a; b]$ par $[c; b]$ si $f(c) < 0$ et par $[a; c]$ sinon, puis à recommencer. Justifier que ce nouvel intervalle contient encore α .
4. Montrer que f est convexe sur $[1; 2]$. En déduire que, pour $a \in [1; 2[$ et $b = 2$, le point d'abscisse c vérifie $f(c) \leq 0$. Que devient la borne $b = 2$ au fil des étapes? Cette méthode permet-elle d'utiliser le test « $b - a \leq e$ » de la dichotomie?
5. Dans la boucle `while` du script suivant, on remplace le test de la dichotomie par un test sur $f(a+e)$.

Compléter ce script, qui renvoie le nombre d'étapes effectuées et un encadrement de α d'amplitude e .

```
def f(x):  
    return x**3 + 2*x - 5  
  
def secante(e):  
    a, b = 1, 2  
    n = 0  
    while .....:  
        a = a - f(a) * (b - a) / (f(b) - f(a))  
        n = n + 1  
    return n, a, a + e
```

Justifier que l'intervalle renvoyé contient α , puis donner le résultat de `secante(1e-3)` (valeurs de a arrondies à 10^{-5} près) en calculant les valeurs successives de a à la calculatrice.

6. Combien d'étapes la dichotomie sur $[1 ; 2]$ demande-t-elle pour obtenir un encadrement d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-3} ? Comparer.