

Corrigé : Continuité et TVI**Fiche Défi****D1.**

1. Pour $h \neq 0$, $f(a+h) - f(a) = h \times \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$. Quand $h \rightarrow 0$, le taux d'accroissement tend vers $f'(a)$ (réel) et $h \rightarrow 0$, donc $f(a+h) - f(a) \rightarrow 0 \times f'(a) = 0$. Ainsi $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$.

Conclusion : f est continue en a .

2. *Existence :* f est continue sur $[a; b]$ et k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$: le théorème des valeurs intermédiaires donne $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$.

Unicité : supposons deux solutions $x_1 < x_2$ dans $[a; b]$. Comme f est strictement croissante, $f(x_1) < f(x_2)$, ce qui contredit $f(x_1) = f(x_2) = k$.

Conclusion : la solution existe et est unique.

3. Si f est continue et strictement décroissante sur $[a; b]$, alors pour tout $k \in [f(b); f(a)]$ l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a; b]$. En effet, $-f$ est continue et strictement croissante, et $-k \in [-f(a); -f(b)]$: l'équation $-f(x) = -k$ admet une unique solution, qui est la solution de $f(x) = k$.

4. Si f est strictement croissante, pour tout $x \in [a; b]$, $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$: les valeurs prises sont dans $[f(a); f(b)]$. Réciproquement, tout $k \in [f(a); f(b)]$ a un antécédent d'après la question 2.

Conclusion : l'ensemble des valeurs prises par f est $[f(a); f(b)]$.

D2.

1. f_n est un polynôme, donc continue. $f'_n(x) = 3x^2 + n > 0$: f_n est strictement croissante. $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = n > 0$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $u_n \in [0; 1]$. De plus $f_n(0) \neq 0$, donc $u_n > 0$.

2. $f_2(0,45) \approx -0,0089 < 0 < f_2(0,46) \approx 0,0173$ et f_2 est strictement croissante : $0,45 < u_2 < 0,46$.

3. $f_{n+1}(u_n) = u_n^3 + (n+1)u_n - 1 = f_n(u_n) + u_n = u_n > 0$. Donc $f_{n+1}(u_n) > 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$. Comme f_{n+1} est strictement croissante, $u_n > u_{n+1}$.

Conclusion : (u_n) est strictement décroissante.

4. (u_n) est décroissante et minorée par 0 : elle converge vers un réel $\ell \geq 0$.

5. $u_n^3 + nu_n - 1 = 0$ donne $u_n(u_n^2 + n) = 1$, d'où $u_n = \frac{1}{n + u_n^2}$. Comme $u_n > 0$ et $u_n^2 \geq 0$, on a $0 < u_n \leq \frac{1}{n}$. Par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

6. $nu_n = 1 - u_n^3$ et $u_n \rightarrow 0$, donc $nu_n \rightarrow 1$ (la fonction cube est continue en 0). **Conclusion :** $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 1$, c'est-à-dire $u_n \sim \frac{1}{n}$.

D3.

1. $g(\frac{1}{2}) = f(1) - f(\frac{1}{2}) = f(0) - f(\frac{1}{2})$ et $g(0) = f(\frac{1}{2}) - f(0)$. Donc $g(\frac{1}{2}) = -g(0)$.
2. g est continue sur $[0; \frac{1}{2}]$ et 0 est compris entre $g(0)$ et $g(\frac{1}{2}) = -g(0)$ (ce sont deux nombres opposés). D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $a \in [0; \frac{1}{2}]$ tel que $g(a) = 0$, c'est-à-dire $f(a + \frac{1}{2}) = f(a)$.

3. Posons $f(x) = T(2\pi x)$ pour $x \in [0; 1]$: f est continue et $f(0) = T(0) = T(2\pi) = f(1)$. D'après la question 2, il existe $a \in [0; \frac{1}{2}]$ avec $f(a + \frac{1}{2}) = f(a)$, soit $T(\theta_0 + \pi) = T(\theta_0)$ avec $\theta_0 = 2\pi a$. Les points d'angles θ_0 et $\theta_0 + \pi$ sont diamétralement opposés.

4. $G(0) + G(\frac{1}{3}) + G(\frac{2}{3}) = [f(\frac{1}{3}) - f(0)] + [f(\frac{2}{3}) - f(\frac{1}{3})] + [f(1) - f(\frac{2}{3})] = f(1) - f(0) = 0$. Si les trois nombres sont nuls, $a = 0$ convient. Sinon, leur somme étant nulle, deux d'entre eux sont de signes strictement opposés (l'un > 0 , l'autre < 0) : 0 est compris entre ces deux valeurs de G , et G est continue sur $[0; \frac{2}{3}]$. Le théorème des valeurs intermédiaires donne $a \in [0; \frac{2}{3}]$ tel que $G(a) = 0$, c'est-à-dire $f(a + \frac{1}{3}) = f(a)$.

D4.

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 = f(1)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a + b$. Continuité en 1 si et seulement si $a + b = 1$.
- Avec $b = 1 - a$. À gauche : $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 \rightarrow 2$. À droite : $\frac{a\sqrt{x} + 1 - a - 1}{x - 1} = \frac{a(\sqrt{x} - 1)}{x - 1} = \frac{a}{\sqrt{x} + 1} \rightarrow \frac{a}{2}$. La fonction est dérivable en 1 si et seulement si les deux limites sont égales : $\frac{a}{2} = 2$.
Conclusion : $a = 4$ et $b = -3$.
- Sur $[0; 1]$, $f(x) = x^2$ est strictement croissante. Sur $[1; +\infty[$, $f(x) = 4\sqrt{x} - 3$ est strictement croissante (composée croissante). Pour $x < 1 < y$, $f(x) < f(1) < f(y)$: f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Limite : $4\sqrt{x} - 3 \rightarrow +\infty$.
- f est continue sur $[0; +\infty[$ (continue en 1 d'après la question 1, et continue ailleurs), strictement croissante, avec $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Pour tout $k \geq 0$, $k \in [0; +\infty[$: le corollaire donne une unique solution.
 Pour $k = \frac{1}{4} \leq 1$, la solution est dans $[0; 1]$ et $x^2 = \frac{1}{4}$, donc $x = \frac{1}{2}$. Pour $k = 5 > 1$, la solution est dans $]1; +\infty[$ et $4\sqrt{x} - 3 = 5$, donc $\sqrt{x} = 2$ et $x = 4$.
Conclusion : les solutions sont $\frac{1}{2}$ pour $k = \frac{1}{4}$, et 4 pour $k = 5$.

D5.

- En $-\infty$: $x^2 - 3 \rightarrow +\infty$ et $e^{-x} \rightarrow +\infty$, donc $f(x) \rightarrow +\infty$. En $+\infty$: $f(x) = x^2 e^{-x} - 3e^{-x}$ avec $x^2 e^{-x} = \frac{x^2}{e^x} \rightarrow 0$ (croissance comparée) et $e^{-x} \rightarrow 0$: $f(x) \rightarrow 0$.
- $f'(x) = 2xe^{-x} - (x^2 - 3)e^{-x} = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x} = -(x - 3)(x + 1)e^{-x}$. Le signe est celui de $-(x - 3)(x + 1)$: négatif pour $x < -1$, positif sur $] -1; 3[$, négatif pour $x > 3$. Valeurs : $f(-1) = -2e$, $f(3) = 6e^{-3} \approx 0,299$.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$-2e$	$6e^{-3}$	0	

- f est continue et strictement monotone sur $I_1 =]-\infty; -1]$ (valeurs : $[-2e; +\infty[$), $I_2 = [-1; 3]$ (valeurs : $[-2e; 6e^{-3}]$) et $I_3 = [3; +\infty[$ (valeurs : $]0; 6e^{-3}]$, la valeur 0 n'étant pas atteinte). Le corollaire donne :

k	nombre de solutions
$k < -2e$	0
$k = -2e$	1 ($x = -1$)
$-2e < k \leq 0$	2 (dans I_1 et I_2)
$0 < k < 6e^{-3}$	3 (un dans chaque intervalle)
$k = 6e^{-3}$	2 ($x = 3$ et un dans I_1)
$k > 6e^{-3}$	1 (dans I_1)

- Pour $k = 0$: deux solutions. Directement, $f(x) = 0 \iff x^2 = 3 \iff x = \pm\sqrt{3}$: deux solutions, $-\sqrt{3} \approx -1,73 \in I_1$ et $\sqrt{3} \approx 1,73 \in I_2$. C'est cohérent.
- $1 > 6e^{-3}$, donc $f(x) = 1$ a une unique solution α , située dans I_1 et même dans $]-\infty; -1[$. $f(-1,79) \approx 1,222 > 1 > f(-1,78) \approx 0,999$ et f est strictement décroissante sur I_1 : $-1,79 < \alpha < -1,78$.

D6.

1. Étape 1 : $m = 1,5$, $f(m) = 2$, $f(a) = f(0) = -1$, produit < 0 : $b = 1,5$. Étape 2 ($b - a = 1,5 > 0,5$) : $m = 0,75$, $f(m) = -4$, produit $f(m)f(0) = 4 > 0$: $a = 0,75$. Étape 3 ($b - a = 0,75 > 0,5$) : $m = 1,125$, $f(m) = 8$, $f(a) = -4$, produit < 0 : $b = 1,125$. Alors $b - a = 0,375 \leq 0,5$: arrêt. Résultat : $(0.75, 1.125)$.
2. f ne s'annule jamais ($\frac{1}{x-1} \neq 0$). Elle n'est pas définie en 1, donc pas continue sur $[0; 3]$: l'hypothèse du théorème des valeurs intermédiaires n'est pas vérifiée. Le changement de signe vient du saut à travers l'asymptote verticale $x = 1$, non d'un passage par 0. L'algorithme, qui ne teste que des signes, encadre le point de discontinuité et non une solution.
3. g est continue et strictement croissante sur $[1; 2]$ ($g'(x) = 2x > 0$), avec $g(1) = -1 < 0 < 2 = g(2)$: g s'annule une seule fois, en $\sqrt{2}$, et les hypothèses de la dichotomie sont vérifiées. L'amplitude vaut $\frac{1}{2^n}$ après n étapes. On veut $2^n \geq 10^{10}$. Or $2^{33} = 8\,589\,934\,592 < 10^{10} < 17\,179\,869\,184 = 2^{34}$.
Conclusion : 34 étapes.

4. On n'a besoin que de la largeur de l'intervalle, qui est divisée par deux à chaque étape.

def nb_etapes(a, b, e):

 n = 0

 largeur = b - a

 while largeur > e:

 largeur = largeur / 2

 n = n + 1

 return n

Par exemple nb_etapes(1, 2, 1e-10) renvoie 34.

D7.

1. Pour $x \neq 0$, $p(x) = x^3 \left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}\right)$. Quand $x \rightarrow \pm\infty$, la parenthèse tend vers 1 et $x^3 \rightarrow \pm\infty$. Donc $p(x) \rightarrow +\infty$ en $+\infty$ et $p(x) \rightarrow -\infty$ en $-\infty$.
2. D'après les limites, il existe $A > 0$ tel que $p(-A) < 0 < p(A)$. Le polynôme p est continu sur $[-A; A]$ et 0 est compris entre $p(-A)$ et $p(A)$: le théorème des valeurs intermédiaires donne $r \in]-A; A[$ tel que $p(r) = 0$.
3. $p'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = (3x - 1)(x - 1)$. p est strictement croissante sur $]-\infty; \frac{1}{3}]$, strictement décroissante sur $[\frac{1}{3}; 1]$, strictement croissante sur $[1; +\infty[$. On a $p(\frac{1}{3}) = \frac{31}{27}$ et $p(1) = 1$. Sur $[\frac{1}{3}; 1]$, p décroît donc $p(x) \geq p(1) = 1$. Sur $[1; +\infty[$, p croît donc $p(x) \geq p(1) = 1$.
Conclusion : $p(x) \geq 1$ pour tout $x \geq \frac{1}{3}$.
4. Pour $x \geq \frac{1}{3}$, $p(x) \geq 1 > 0$: aucune solution. Sur $]-\infty; \frac{1}{3}]$, p est continue, strictement croissante, de limite $-\infty$ à $p(\frac{1}{3}) = \frac{31}{27} > 0$: comme $0 \in]-\infty; \frac{31}{27}]$, le corollaire donne une unique solution r . Enfin $p(-0,5) = -0,125 < 0 < p(-0,4) = 0,216$ et p est strictement croissante : $-0,5 < r < -0,4$.
Conclusion : $p(x) = 0$ a une unique solution réelle $r \in]-0,5; -0,4[$.

D8.

1. $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$, donc f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $f(1) = -2 < 0 < 7 = f(2)$, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires donne une unique solution $\alpha \in [1; 2]$.
2. a) Le coefficient directeur de (AB) est $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, d'où l'équation $y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. Elle s'annule en c tel que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a) = -f(a)$, soit $c = a - \frac{f(a)(b - a)}{f(b) - f(a)}$. Comme $f(a) < 0 < f(b)$, on a $-f(a) > 0$ et $f(b) - f(a) > 0$; de plus $-f(a) < f(b) - f(a)$ car $f(b) > 0$. Donc $0 < c - a = \frac{-f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a) < b - a$, c'est-à-dire $a < c < b$.
b) $f(1) = -2$ et $f(2) = 7$, donc $c = 1 + \frac{2 \times 1}{7 + 2} = \frac{11}{9} \approx 1,2222$. On calcule $f\left(\frac{11}{9}\right) = \frac{1331}{729} + \frac{22}{9} - 5 = \frac{1331 + 1782 - 3645}{729} = -\frac{532}{729} \approx -0,7298 < 0$. Comme $f\left(\frac{11}{9}\right) < 0 < f(2)$, $\alpha \in \left]\frac{11}{9}; 2\right]$.
3. Si $f(c) < 0$, alors $f(c) < 0 < f(b)$ et, f étant continue strictement croissante, le corollaire donne

$\alpha \in]c; b[$. Sinon $f(c) \geq 0$ et $f(a) < 0 \leq f(c)$ donne $\alpha \in]a; c]$. Dans les deux cas, le nouvel intervalle contient α et l'on a encore une valeur négative et une valeur positive (ou nulle) de f aux extrémités.

4. $f''(x) = 6x > 0$ sur $[1; 2]$, donc f est convexe sur $[1; 2]$: sa courbe est en dessous de ses cordes. Sur $[a; 2]$, la corde $[AB]$ (avec $b = 2$) est au-dessus de la courbe ; au point d'abscisse c la corde est à la hauteur 0, donc $f(c) \leq 0$. Si $f(c) = 0$, alors $c = \alpha$ et la recherche est terminée ; sinon $f(c) < 0$ et la borne gauche devient c .

Conclusion : la borne $b = 2$ ne change jamais. Comme $f(1,5) = 1,375 > 0$, on a $\alpha < 1,5$, donc $b - a > 0,5$ à toutes les étapes : le test « $b - a \leq e$ » ne devient jamais vrai pour e petit, il ne peut pas servir ici.

5. Le test de boucle est $f(a + e) \leq 0$:

```
while f(a + e) <= 0:
```

On a toujours $f(a) < 0$ (question 4) ; à la sortie de la boucle, $f(a + e) > 0$. Par le corollaire, $\alpha \in]a; a + e[$, intervalle d'amplitude e .

Valeurs successives de a : $a_1 = \frac{11}{9} \approx 1,22222$, $a_2 = \frac{149}{115} \approx 1,29565$, $a_3 \approx 1,31840$, $a_4 \approx 1,32530$, $a_5 \approx 1,32738$. On a $f(a_4 + 10^{-3}) \approx f(1,32630) \approx -0,0143 < 0$, donc la boucle continue ; puis $f(a_5 + 10^{-3}) \approx f(1,32838) \approx 0,0008 > 0$: la boucle s'arrête.

Conclusion : `secante(1e-3)` renvoie $(5; 1,32738; 1,32838)$, d'où $1,32738 < \alpha < 1,32838$.

6. Il faut $\frac{1}{2^n} \leq 10^{-3}$, soit $2^n \geq 1\,000$: $n = 10$ (car $2^9 = 512$ et $2^{10} = 1\,024$). **Conclusion :** la sécante demande 5 étapes là où la dichotomie en demande 10. Chaque étape de la sécante utilise en revanche le calcul de $f(a + e)$ et une division.