

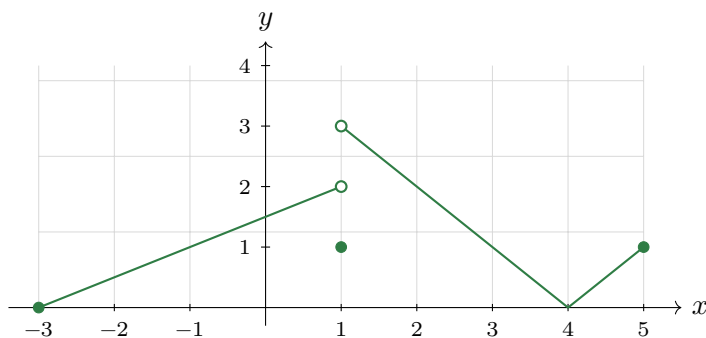
Continuité et TVI**Fiche Bases**

Nom : _____

Date : _____

Exercice B1 : Lecture graphique

On donne la courbe d'une fonction f définie sur $[-3; 5]$. Les points creux n'appartiennent pas à la courbe, les points pleins en font partie.



1. Lire $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $f(1)$. La fonction f est-elle continue en 1 ?
2. Mêmes questions en 4.
3. Sur quels intervalles la fonction f est-elle continue ?
4. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0,5$, puis de l'équation $f(x) = 2,5$.
5. Le théorème des valeurs intermédiaires s'applique-t-il à f sur $[-3; 5]$? Justifier.

Exercice B2 : Continuité en un point

Étudier la continuité de chaque fonction au point indiqué : calculer la limite à gauche, la limite à droite et la valeur en ce point, puis conclure.

1. $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x < 2 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ en 2.
2. $g(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x \leq 3 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ en 3.
3. $k(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$ pour $x \neq 3$ et $k(3) = 5$, en 3.

Exercice B3 : Déterminer un paramètre

Dans chaque cas, déterminer le réel indiqué pour que la fonction soit continue sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = \begin{cases} ax + 2 & \text{si } x < -1 \\ x^2 + 3x & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$: déterminer a .
2. $g(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$ pour $x \neq 2$ et $g(2) = m$: déterminer m .
3. $h(x) = \begin{cases} x + b & \text{si } x < 0 \\ e^x - 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$: déterminer b .

Exercice B4 : Prolongement par continuité

Dans chaque cas, montrer que f se prolonge par continuité au point indiqué et donner la valeur du prolongement.

1. $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ en 4.
2. $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 1}$ en -1.

3. $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ en 0.

Exercice B5 : Justifier une continuité

Justifier que chaque fonction est continue sur l'intervalle indiqué.

1. $f(x) = x^2 e^x - 3x$ sur $\mathbb{R}$.
2. $g(x) = \frac{2x+1}{x^2-4}$ sur $]2; +\infty[$.
3. $h(x) = \sqrt{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.
4. $k(x) = |x-1| + \cos x$ sur $\mathbb{R}$.
5. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$. Montrer que g est continue sur $]0; +\infty[$ mais n'est pas continue en 0.

Exercice B6 : Vrai ou faux

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, et justifier (démonstration, théorème ou contre-exemple).

1. Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .
2. Si f est continue en a , alors f est dérivable en a .
3. Si f est continue sur $[0; 1]$ avec $f(0) = -2$ et $f(1) = 3$, alors l'équation $f(x) = 4$ admet au moins une solution dans $[0; 1]$.
4. Si f est continue sur $[-1; 1]$ avec $f(-1) = f(1) = 1$, alors f ne s'annule pas sur $[-1; 1]$.
5. Si f est strictement croissante sur $[0; 2]$ avec $f(0) = -1$ et $f(2) = 2$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution dans $[0; 2]$.
6. Si f est continue sur $[0; 4]$ avec $f(0) = 3$ et $f(4) = -1$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]0; 4[$.

Exercice B7 : Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

1. Soit $f(x) = x^3 + 2x - 5$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[1; 2]$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet aussi une unique solution dans $[1; 2]$.
3. Soit $g(x) = e^{-x} - x$. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; 1]$, puis justifier que $0,56 < \alpha < 0,57$.

Exercice B8 : Nombre de solutions d'après un tableau

Une fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et son tableau de variations est le suivant.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	4	-2	$+\infty$

Pour chaque valeur de k ci-dessous, donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ en justifiant avec le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

$$k = -3 ; \quad k = -2 ; \quad k = 0 ; \quad k = 4 ; \quad k = 5.$$

Exercice B9 : Dichotomie en Python

On considère le script suivant, où la fonction f est définie par $f(x) = x^2 - 7$.

```
def f(x):  
    return x**2 - 7  
  
def dichotomie(f, a, b, e):  
    while b - a > e:  
        m = (a + b) / 2  
        if f(m) * f(a) <= 0:  
            b = m  
        else:  
            a = m  
    return a, b
```

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[2; 3]$. De quel nombre s'agit-il ?
2. Recopier et compléter le tableau des valeurs prises par a , b , m et $f(m)$ au fil des étapes de `dichotomie(f, 2, 3, 0.3)`, puis donner la valeur renvoyée.
3. Combien d'étapes faut-il pour obtenir, à partir de $[2; 3]$, un encadrement d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-3} ?