

Corrigé : Continuité et TVI**Fiche Bases****B1.**

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$ et $f(1) = 1$. Ces trois nombres sont différents. **Conclusion :** f n'est pas continue en 1 (la courbe fait un saut).
- $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 0$ et $f(4) = 0$. Les trois nombres sont égaux. **Conclusion :** f est continue en 4.
- La courbe se trace sans lever le crayon sur $[-3; 1[$ et sur $]1; 5]$ (morceaux de droites). **Conclusion :** f est continue sur $[-3; 1[$ et sur $]1; 5]$, mais pas sur $[-3; 5]$ car elle n'est pas continue en 1.
- La droite $y = 0,5$ coupe la courbe en trois points, d'abscisses -2 , $3,5$ et $4,5$: l'équation $f(x) = 0,5$ a **trois solutions**. La droite $y = 2,5$ coupe la courbe en un seul point, d'abscisse $1,5$: l'équation $f(x) = 2,5$ a **une solution**.
- Non. L'hypothèse de continuité sur $[-3; 5]$ n'est pas vérifiée, puisque f n'est pas continue en 1. Le théorème ne s'applique donc pas (même si ici $0,5$ est compris entre $f(-3) = 0$ et $f(5) = 1$ et si l'équation $f(x) = 0,5$ admet bien des solutions : le théorème ne le garantit pas).

B2.

- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3 \times 2 - 1 = 5$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2^2 + 1 = 5$ et $f(2) = 2^2 + 1 = 5$. **Conclusion :** les trois nombres sont égaux, f est continue en 2.
- $g(3) = 3^2 - 3 = 6$ et $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = 6$, mais $\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = 2 \times 3 + 1 = 7$. **Conclusion :** les limites à gauche et à droite sont différentes, g n'est pas continue en 3.
- Pour $x \neq 3$, $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$, donc $k(x) = x + 2$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow 3} k(x) = 5 = k(3)$. **Conclusion :** k est continue en 3.

B3.

- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -a + 2$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1 - 3 = -2$ et $f(-1) = -2$. La fonction f est continue sur $] -\infty; -1[$ et sur $] -1; +\infty[$ (polynômes), donc continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $-a + 2 = -2$, c'est-à-dire $a = 4$.
Conclusion : $a = 4$.
- Pour $x \neq 2$, $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$, donc $g(x) = x - 3$ et $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -1$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $g(2) = -1$.
Conclusion : $m = -1$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = e^0 - 3 = -2$ et $h(0) = -2$. Continuité en 0 si et seulement si $b = -2$; sur $\mathbb{R}^*$, h est continue (fonctions usuelles).
Conclusion : $b = -2$.

B4.

- f n'est pas définie en 4. Pour $x \neq 4$, $f(x) = \frac{(x - 4)(x + 4)}{x - 4} = x + 4$, donc $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 8$.
Conclusion : la limite est finie, f se prolonge par continuité en posant $f(4) = 8$.
- Pour $x \neq -1$, $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$, donc $f(x) = x^2 - x + 1$ et $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1 + 1 + 1 = 3$.
Conclusion : f se prolonge par continuité en posant $f(-1) = 3$.
- f est définie sur $[-4; 0[\cup]0; +\infty[$. En multipliant par la quantité conjuguée, pour $x \neq 0$:

$$f(x) = \frac{(x + 4) - 4}{x(\sqrt{x + 4} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{x + 4} + 2}.$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}.$$

Conclusion : f se prolonge par continuité en posant $f(0) = \frac{1}{4}$.

B5.

1. f est continue sur $\mathbb{R}$: c'est une somme et un produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ (polynômes, exponentielle).
2. g est un quotient de deux polynômes, donc de fonctions continues, dont le dénominateur $x^2 - 4$ ne s'annule pas sur $]2; +\infty[$ (il ne s'annule qu'en -2 et 2). Donc g est continue sur $]2; +\infty[$.
3. La fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[1; +\infty[\subset [0; +\infty[$, intervalle sur lequel la racine carrée est continue. Par composition, h est continue sur $\mathbb{R}$.
4. $x \mapsto |x - 1|$ est continue sur $\mathbb{R}$ (composée de la valeur absolue et d'une fonction affine), $\cos$ est continue sur $\mathbb{R}$. Par somme, k est continue sur $\mathbb{R}$.
5. Sur $]0; +\infty[$, $g(x) = \frac{1}{x}$ est l'inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas : g est continue sur $]0; +\infty[$. En 0 : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$, qui n'est pas un réel, donc g n'a pas de limite finie en 0 (et en particulier pas la limite $g(0) = 0$). **Conclusion** : g n'est pas continue en 0 .

B6.

1. **Vrai.** C'est une propriété du cours : si f est dérivable en a , alors f est continue en a .
2. **Faux.** Contre-exemple : la valeur absolue est continue en 0 mais pas dérivable en 0 , car son taux d'accroissement $\frac{|x|}{x}$ vaut -1 pour $x < 0$ et 1 pour $x > 0$.
3. **Faux.** Le réel 4 n'est pas compris entre $f(0) = -2$ et $f(1) = 3$. Contre-exemple : $f(x) = 5x - 2$ est continue sur $[0; 1]$, $f(0) = -2$, $f(1) = 3$, et $f(x) = 4$ donne $x = \frac{6}{5} \notin [0; 1]$.
4. **Faux.** Le théorème des valeurs intermédiaires ne dit rien ici. Contre-exemple : $f(x) = 2x^2 - 1$ est continue, $f(-1) = f(1) = 1$, et f s'annule en $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.
5. **Faux.** La stricte croissance ne suffit pas : il faut la continuité. Contre-exemple sur $[0; 2]$: $f(x) = x - 1$ si $x < 1$ et $f(x) = x$ si $x \geq 1$. Elle est strictement croissante, $f(0) = -1$, $f(2) = 2$, mais $f(x) < 0$ pour $x < 1$ et $f(x) \geq 1$ pour $x \geq 1$: f ne s'annule jamais.
6. **Vrai.** f est continue sur $[0; 4]$ et 0 est compris entre $f(4) = -1$ et $f(0) = 3$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0; 4]$ tel que $f(c) = 0$; comme $f(0) \neq 0$ et $f(4) \neq 0$, on a $c \in]0; 4[$.

B7.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme), donc continue. $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$: f est strictement croissante sur $[1; 2]$. De plus $f(1) = -2 < 0 < 7 = f(2)$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[1; 2]$.
2. Même continuité et même stricte croissance. Comme $f(1) = -2 < 1 < 7 = f(2)$, le corollaire donne : l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution dans $[1; 2]$.
3. g est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue. $g'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$: g est strictement décroissante sur $[0; 1]$. De plus $g(0) = 1 > 0$ et $g(1) = e^{-1} - 1 < 0$ car $e^{-1} < 1$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; 1]$.
Calcul : $g(0,56) \approx 0,0112 > 0$ et $g(0,57) \approx -0,0045 < 0$. Comme g est strictement décroissante, $g(0,57) < g(\alpha) < g(0,56)$ entraîne $0,56 < \alpha < 0,57$.

B8. f est continue et strictement monotone sur chacun des intervalles $I_1 =]-\infty; -1]$ (croissante, valeurs dans $] -\infty; 4]$), $I_2 = [-1; 2]$ (décroissante, valeurs dans $[-2; 4]$) et $I_3 = [2; +\infty[$ (croissante, valeurs dans $[-2; +\infty[$). D'après le corollaire, sur chacun de ces intervalles, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution si k appartient à l'ensemble des valeurs, et aucune sinon.

- $k = -3$: seulement I_1 ($-3 < -2$). **Une solution.**
- $k = -2$: une solution dans I_1 (strictement avant -1 car $f(-1) = 4$), et $x = 2$ (qui appartient à I_2 et I_3). **Deux solutions.**
- $k = 0$: 0 est dans les trois ensembles de valeurs ; comme $f(-1) = 4 \neq 0$ et $f(2) = -2 \neq 0$, les trois solutions sont dans $] -\infty; -1[$, $] -1; 2[$ et $] 2; +\infty[$, donc distinctes. **Trois solutions.**

- $k = 4$: $x = -1$ (dans I_1 et I_2), et une solution dans I_3 , strictement supérieure à 2. **Deux solutions.**
- $k = 5$: seulement I_3 ($5 > 4$). **Une solution.**

B9.

1. f est continue sur $[2; 3]$ (polynôme) et $f'(x) = 2x > 0$: elle est strictement croissante. $f(2) = -3 < 0 < 2 = f(3)$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[2; 3]$. Comme $\alpha^2 = 7$ et $\alpha > 0$, $\alpha = \sqrt{7}$.
2. Tableau (avec $f(2) = -3$ au départ) :

étape	a	b	$b - a$	m	$f(m)$	mise à jour
1	2	3	1	2,5	-0,75	$f(m)f(a) > 0$: $a = 2,5$
2	2,5	3	0,5	2,75	0,5625	$f(m)f(a) < 0$: $b = 2,75$
fin	2,5	2,75	0,25			$0,25 \leq 0,3$: arrêt

La fonction renvoie $(2,5; 2,75)$, donc $2,5 < \sqrt{7} < 2,75$.

3. Après n étapes, l'amplitude vaut $\frac{1}{2^n}$. On veut $\frac{1}{2^n} \leq 10^{-3}$, soit $2^n \geq 1000$. Comme $2^9 = 512$ et $2^{10} = 1024$, il faut **10 étapes**.