

Fiche 3 : existence et unicité, dichotomie

Huit exercices sur le corollaire du TVI : montrer qu'une équation a **une unique solution**, la localiser, la compter selon un paramètre, l'encadrer avec une calculatrice ou un script de dichotomie, l'utiliser pour définir une suite.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac : les quatre étapes du corollaire sont écrites dans l'ordre : continuité, stricte monotonie, valeurs aux bornes, conclusion.

Le modèle de rédaction du corollaire

« La fonction f est continue et strictement croissante (ou décroissante) sur l'intervalle I .

De plus $f(a) = \dots$ et $f(b) = \dots$ (ou $\lim \dots = \dots$), donc k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I . »

- Le **tableau de variations** avec limites justifie à lui seul la monotonie et les valeurs aux bornes.
- Pour **plusieurs solutions**, on applique le corollaire sur chaque intervalle de stricte monotonie.
- Pour **encadrer**, on cherche un changement de signe en faisant varier x par pas de 0,1 puis 0,01.

Les pièges classiques

- Oublier la **stricte monotonie** : sans elle, tu n'as pas l'unicité.
- Appliquer le corollaire sur un intervalle où f n'est **pas monotone**.
- Ne pas vérifier que k est compris entre les valeurs (ou limites) aux bornes.
- Écrire « $\alpha \approx 0,68$ » sans encadrement justifié par des calculs : donne toujours $f(0,68)$ et $f(0,69)$.

Le corollaire est le seul théorème qui, en plus de te dire « il y a une solution », te certifie qu'il n'y en a pas deux. C'est le grand luxe.

Exercice 1 (★★) : une équation avec unique solution, et son encadrement

Soit $f(x) = x^3 + x - 1$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; 1]$.
2. Encadrer α à 10^{-2} près.

Exercice 2 (★★) : un intervalle infini et des limites

Soit $h(x) = e^x + x - 2$ sur $\mathbb{R}$.

1. Étudier les variations de h et déterminer ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $\alpha \in]0; 1[$, puis l'encadrer à 10^{-2} près, et donner le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x .

Exercice 3 (★★★) : exactement trois solutions

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions dans $\mathbb{R}$, et les localiser.

Exercice 4 (★★) : la dichotomie à la main

On veut encadrer $\sqrt{2}$, solution positive de $f(x) = x^2 - 2 = 0$, avec la dichotomie sur $[1; 2]$. Effectuer quatre étapes et donner l'encadrement obtenu, avec sa largeur.

Exercice 5 (★★★) : nombre de solutions selon un paramètre

Soit $f(x) = x^3 - 3x$. Discuter, selon les valeurs du réel m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Exercice 6 (★★★) : une suite définie implicitement

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = x^n + x - 1$ sur $[0; 1]$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $[0; 1]$, et que $\alpha_n \in]0; 1[$.
2. Calculer α_1 et α_2 .
3. Montrer que $f_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1}^n(1 - \alpha_{n+1})$, puis que la suite (α_n) est croissante.
4. En déduire que (α_n) converge, puis que sa limite vaut 1.

Exercice 7 (★★) : lire un script de dichotomie

On considère le script du cours (`dichotomie(f, a, b, e)`) avec $f(x) = x^3 + x - 1$, $a = 0$, $b = 1$ et $e = 0,01$.

1. Exécuter le script à la main et donner le couple renvoyé.
2. Combien d'itérations faut-il pour obtenir une précision de 10^{-3} sur l'intervalle $[1; 2]$?

Exercice 8 (★★) : l'équation $f(x) = k$

Soit $g(x) = x^3 + 2x$. Montrer que l'équation $g(x) = 5$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, puis l'encadrer à 10^{-1} près.

Ce qui peut tomber au bac

- « Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution » puis un **encadrement** à 10^{-2} (exercices 1, 2, 8).
- Un **nombre de solutions** avec un tableau de variations (exercices 3 et 5).
- Un **algorithme de dichotomie** à exécuter ou à compléter (exercices 4 et 7).
- Une **suite définie par une équation** (exercice 6), qui mêle TVI, monotonie et limite.

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Le corollaire du TVI donne une solution unique si f est continue et :
 - A. dérivable en a
 - B. égale à k en a
 - C. strictement monotone sur $[a; b]$, avec k entre $f(a)$ et $f(b)$
 - D. positive sur $[a; b]$
2. Dans la méthode de dichotomie, après avoir calculé $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, on garde :
 - A. l'intervalle entier
 - B. toujours la moitié droite
 - C. toujours la moitié gauche
 - D. la moitié de l'intervalle où f change de signe
3. Après n étapes de dichotomie sur $[0; 1]$, l'amplitude de l'intervalle est :
 - A. $\frac{1}{2n}$
 - B. $\frac{1}{2^n}$

- C. $\frac{n}{2}$
 D. $\frac{1}{n}$

4. Pour $f(x) = x^3 + x - 1$, on a $f(0,5) = -0,375$ et $f(1) = 1$. La solution α de $f(x) = 0$ est dans :
- A. $] -1 ; 0[$
 B. $]0 ; 0,5[$
 C. $]0,5 ; 1[$
 D. $]1 ; 2[$
5. Pour une amplitude inférieure à 10^{-3} en partant de $[0 ; 1]$, il faut au minimum :
- A. 100 étapes
 B. 1 000 étapes
 C. 10 étapes de dichotomie
 D. 9 étapes
6. Dans l'exercice 1, avec $f(x) = x^3 + x - 1$, quel encadrement de la solution α obtient-on à 10^{-2} près ?
- A. $0,5 < \alpha < 0,6$
 B. $0 < \alpha < 1$
 C. $0,68 < \alpha < 0,69$
 D. $0,6 < \alpha < 0,7$
7. Dans l'exercice 3, avec $f(x) = x^3 - 3x + 1$, combien de solutions réelles l'équation $f(x) = 0$ admet-elle exactement ?
- A. 2
 B. 3
 C. 0
 D. 1
8. Dans l'exercice 5, avec $f(x) = x^3 - 3x$, pour $m = 0$, combien l'équation $f(x) = 0$ admet-elle de solutions ?
- A. 0 solution
 B. 3 solutions
 C. 2 solutions
 D. 1 solution
9. Dans l'exercice 6, avec $f_n(x) = x^n + x - 1$, que vaut α_2 , solution de $f_2(x) = 0$ sur $[0 ; 1]$?
- A. $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$
 B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$

D. 1

10. Dans l'exercice 7, avec le script de dichotomie sur $f(x) = x^3 + x - 1$, $[0; 1]$ et une précision $e = 0,01$, quel couple le script renvoie-t-il ?

A. $(0; 1)$

B. $(0,6796875; 0,6875)$

C. $(0,68; 0,69)$

D. $(0,5; 0,75)$