

Fiche 3 : existence et unicité, dichotomie

Huit exercices sur le corollaire du TVI : montrer qu'une équation a **une unique solution**, la localiser, la compter selon un paramètre, l'encadrer avec une calculatrice ou un script de dichotomie, l'utiliser pour définir une suite.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac : les quatre étapes du corollaire sont écrites dans l'ordre : continuité, stricte monotonie, valeurs aux bornes, conclusion.

Le modèle de rédaction du corollaire

« La fonction f est continue et strictement croissante (ou décroissante) sur l'intervalle I .

De plus $f(a) = \dots$ et $f(b) = \dots$ (ou $\lim \dots = \dots$), donc k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I . »

- Le **tableau de variations** avec limites justifie à lui seul la monotonie et les valeurs aux bornes.
- Pour **plusieurs solutions**, on applique le corollaire sur chaque intervalle de stricte monotonie.
- Pour **encadrer**, on cherche un changement de signe en faisant varier x par pas de 0,1 puis 0,01.

Les pièges classiques

- Oublier la **stricte monotonie** : sans elle, tu n'as pas l'unicité.
- Appliquer le corollaire sur un intervalle où f n'est **pas monotone**.
- Ne pas vérifier que k est compris entre les valeurs (ou limites) aux bornes.
- Écrire « $\alpha \approx 0,68$ » sans encadrement justifié par des calculs : donne toujours $f(0,68)$ et $f(0,69)$.

Le corollaire est le seul théorème qui, en plus de te dire « il y a une solution », te certifie qu'il n'y en a pas deux. C'est le grand luxe.

Exercice 1 (★★) : une équation avec unique solution, et son encadrement

Soit $f(x) = x^3 + x - 1$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; 1]$.
2. Encadrer α à 10^{-2} près.

Correction de l'exercice 1

Question 1

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme), donc continue sur $[0; 1]$.

Pour tout x , $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, donc f est strictement croissante sur $[0; 1]$.

De plus $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$, donc 0 est compris entre $f(0)$ et $f(1)$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; 1]$.

Question 2

On calcule f par pas de 0,1 :

$$f(0,6) = 0,216 + 0,6 - 1 = -0,184 < 0$$

$$f(0,7) = 0,343 + 0,7 - 1 = 0,043 > 0$$

Donc $0,6 < \alpha < 0,7$ (f est strictement croissante). Puis, par pas de 0,01 :

$$f(0,68) \approx -0,0056 < 0$$

$$f(0,69) \approx 0,0185 > 0$$

$$0,68 < \alpha < 0,69$$

Exercice 2 (★★) : un intervalle infini et des limites

Soit $h(x) = e^x + x - 2$ sur $\mathbb{R}$.

1. Étudier les variations de h et déterminer ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $\alpha \in]0; 1[$, puis l'encadrer à 10^{-2} près, et donner le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x .

Correction de l'exercice 2

Question 1

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $h'(x) = e^x + 1 > 0$ pour tout x .

Donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

En $-\infty$, $e^x \rightarrow 0$ et $x \rightarrow -\infty$, donc, par somme :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h = -\infty$$

En $+\infty$, $e^x \rightarrow +\infty$ et $x \rightarrow +\infty$, donc, par somme :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h = +\infty$$

Question 2

La fonction h est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Elle a pour limites $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$.

Le nombre 0 est strictement compris entre ces limites.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

Question 3

On a $h(0) = -1 < 0$ et $h(1) = e - 1 > 0$. Comme h est strictement croissante :

$$\alpha \in]0; 1[$$

Par pas de 0,1 : $h(0,4) \approx -0,108 < 0$ et $h(0,5) \approx 0,149 > 0$, donc $0,4 < \alpha < 0,5$. Par pas de 0,01 : $h(0,44) \approx -0,0073 < 0$ et $h(0,45) \approx 0,0183 > 0$.

$$0,44 < \alpha < 0,45$$

Signe de h . Comme h est strictement croissante et $h(\alpha) = 0$: $h(x) < 0$ pour $x < \alpha$, $h(\alpha) = 0$, et $h(x) > 0$ pour $x > \alpha$.

Exercice 3 (★★★) : exactement trois solutions

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions dans $\mathbb{R}$, et les localiser.

Correction de l'exercice 3

Variations. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue. Pour tout x , $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. $f' > 0$ sur $] -\infty; -1[$, $f' < 0$ sur $] -1; 1[$ et $f' > 0$ sur $]1; +\infty[$.

Donc f est strictement croissante sur $] -\infty; -1[$, strictement décroissante sur $[-1; 1]$ et strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

Valeurs : $f(-1) = -1 + 3 + 1 = 3$ et $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$.

Limites : $f(x) = x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$.

Sur $] -\infty; -1[$. f est continue et strictement croissante, de $-\infty$ à 3.

Le nombre 0 est compris entre ces valeurs.

D'après le corollaire, l'équation $f(x) = 0$ y admet une unique solution α .

Comme $f(-2) = -1 < 0 < 3 = f(-1)$:

$$\alpha \in]-2; -1[$$

Sur $[-1; 1]$. f est continue et strictement décroissante, de 3 à -1.

Le nombre 0 est compris entre ces valeurs.

D'après le corollaire, l'équation $f(x) = 0$ y admet une unique solution β .

Comme $f(0) = 1 > 0 > -1 = f(1)$:

$$\beta \in]0; 1[$$

Sur $[1; +\infty[$. f est continue et strictement croissante, de -1 à $+\infty$.

Le nombre 0 est compris entre ces valeurs.

D'après le corollaire, l'équation $f(x) = 0$ y admet une unique solution γ .

Comme $f(1) = -1 < 0 < 3 = f(2)$:

$$\gamma \in]1; 2[$$

Conclusion. Ces trois intervalles couvrent $\mathbb{R}$, et $f(-1) \neq 0$, $f(1) \neq 0$: les solutions α , β , γ sont distinctes et il n'y en a pas d'autres.

L'équation $f(x) = 0$ admet donc exactement trois solutions : $\alpha \in]-2; -1[$, $\beta \in]0; 1[$ et $\gamma \in]1; 2[$.

Exercice 4 (★★) : la dichotomie à la main

On veut encadrer $\sqrt{2}$, solution positive de $f(x) = x^2 - 2 = 0$, avec la dichotomie sur $[1; 2]$. Effectuer quatre étapes et donner l'encadrement obtenu, avec sa largeur.

Correction de l'exercice 4

Méthode. La fonction f est continue et strictement croissante sur $[1; 2]$, avec $f(1) = -1 < 0 < 2 = f(2)$: la solution est dans $]1; 2[$. À chaque étape, on calcule f au milieu m de l'intervalle et on garde la moitié où le signe change.

Les étapes

- Étape 1 : $m = 1,5$; $f(1,5) = 0,25 > 0 \rightarrow$ solution dans $[1; 1,5]$.
- Étape 2 : $m = 1,25$; $f(1,25) = -0,4375 < 0 \rightarrow$ solution dans $[1,25; 1,5]$.
- Étape 3 : $m = 1,375$; $f(1,375) \approx -0,1094 < 0 \rightarrow$ solution dans $[1,375; 1,5]$.
- Étape 4 : $m = 1,4375$; $f(1,4375) \approx 0,0664 > 0 \rightarrow$ solution dans $[1,375; 1,4375]$.

Après quatre étapes, $1,375 < \sqrt{2} < 1,4375$

La largeur de l'intervalle est $\frac{2-1}{2^4} = 0,0625$ (à chaque étape, elle est divisée par 2).

Exercice 5 (★★★) : nombre de solutions selon un paramètre

Soit $f(x) = x^3 - 3x$. Discuter, selon les valeurs du réel m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Correction de l'exercice 5

Variations. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.

Donc f est strictement croissante sur $] -\infty; -1]$, strictement décroissante sur $[-1; 1]$ et strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

On a $f(-1) = 2$ et $f(1) = -2$, avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$.

Les valeurs prises. D'après le corollaire, sur chaque intervalle de stricte monotonie, l'équation $f(x) = m$ a une unique solution si m est compris entre les valeurs aux bornes, et aucune sinon :

- Sur $] -\infty; -1]$, f prend toutes les valeurs de $] -\infty; 2]$ une seule fois.
- Sur $[-1; 1]$, f prend toutes les valeurs de $[-2; 2]$ une seule fois.
- Sur $[1; +\infty[$, f prend toutes les valeurs de $[-2; +\infty[$ une seule fois.

Conclusion

- Si $m > 2$:

une seule solution (dans $[1; +\infty[$).

- Si $m = 2$:

deux solutions ($x = -1$ et $x = 2$).

- Si $-2 < m < 2$:

trois solutions, une dans chaque intervalle.

- Si $m = -2$:

deux solutions ($x = 1$ et $x = -2$).

- Si $m < -2$:

une seule solution (dans $] -\infty; -1[$).

Exercice 6 (★★★) : une suite définie implicitement

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = x^n + x - 1$ sur $[0; 1]$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $[0; 1]$, et que $\alpha_n \in]0; 1[$.
2. Calculer α_1 et α_2 .
3. Montrer que $f_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1}^n(1 - \alpha_{n+1})$, puis que la suite (α_n) est croissante.
4. En déduire que (α_n) converge, puis que sa limite vaut 1.

Correction de l'exercice 6**Question 1**

La fonction f_n est dérivable sur $[0; 1]$, donc continue. $f'_n(x) = nx^{n-1} + 1 > 0$: f_n est strictement croissante. De plus $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = 1 > 0$.

D'après le corollaire du TVI :

$f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $[0; 1]$.

Comme $f_n(0) \neq 0$ et $f_n(1) \neq 0$, $\alpha_n \in]0; 1[$.

Question 2

$f_1(x) = 2x - 1 = 0$ donne :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}$$

$f_2(x) = x^2 + x - 1 = 0$: le discriminant vaut 5, et la solution positive est :

$$\alpha_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0,618$$

Question 3

Comme $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$, on a $\alpha_{n+1}^{n+1} + \alpha_{n+1} - 1 = 0$, donc $\alpha_{n+1} - 1 = -\alpha_{n+1}^{n+1}$. Alors :

$$f_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1}^n + \alpha_{n+1} - 1 = \alpha_{n+1}^n - \alpha_{n+1}^{n+1}$$

$$f_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1}^n(1 - \alpha_{n+1})$$

Comme $0 < \alpha_{n+1} < 1$, on a $f_n(\alpha_{n+1}) > 0 = f_n(\alpha_n)$. Comme f_n est strictement croissante sur $[0; 1]$, $f_n(\alpha_{n+1}) > f_n(\alpha_n)$ entraîne $\alpha_{n+1} > \alpha_n$.

La suite (α_n) est strictement croissante.

Question 4

La suite (α_n) est croissante et majorée par 1. D'après le théorème de convergence monotone :

elle converge vers un réel ℓ , avec $\frac{1}{2} = \alpha_1 \leq \ell \leq 1$.

Supposons $\ell < 1$.

Comme (α_n) est croissante, $\alpha_n \leq \ell$ pour tout n , donc $0 < \alpha_n^n \leq \ell^n$, et $\ell^n \rightarrow 0$ car $0 < \ell < 1$.

Donc $\alpha_n^n \rightarrow 0$ (gendarmes).

Or $f_n(\alpha_n) = 0$ donne $\alpha_n = 1 - \alpha_n^n$, donc $\alpha_n \rightarrow 1$, c'est-à-dire $\ell = 1$: contradiction avec $\ell < 1$.

Donc $\ell = 1$.

La suite (α_n) converge vers 1.

Exercice 7 (★★) : lire un script de dichotomie

On considère le script du cours (`dichotomie(f, a, b, e)`) avec $f(x) = x^3 + x - 1$, $a = 0$, $b = 1$ et $e = 0,01$.

1. Exécuter le script à la main et donner le couple renvoyé.
2. Combien d'itérations faut-il pour obtenir une précision de 10^{-3} sur l'intervalle $[1; 2]$?

Correction de l'exercice 7

Question 1

La fonction f est strictement croissante avec $f(0) < 0 < f(1)$.

À chaque itération, on calcule $m = \frac{a+b}{2}$: si $f(m) \cdot f(a) \leq 0$, on remplace b par m ; sinon on remplace a par m .

La boucle tourne tant que $b - a > 0,01$.

- $m = 0,5$; $f(m) = -0,375 \rightarrow a = 0,5$; intervalle $[0,5; 1]$.
- $m = 0,75$; $f(m) \approx 0,172 \rightarrow b = 0,75$; intervalle $[0,5; 0,75]$.
- $m = 0,625$; $f(m) \approx -0,131 \rightarrow a = 0,625$; intervalle $[0,625; 0,75]$.
- $m = 0,6875$; $f(m) \approx 0,012 \rightarrow b = 0,6875$; intervalle $[0,625; 0,6875]$.
- $m = 0,65625$; $f(m) \approx -0,061 \rightarrow a = 0,65625$; intervalle $[0,65625; 0,6875]$.
- $m = 0,671875$; $f(m) \approx -0,025 \rightarrow a = 0,671875$; intervalle $[0,671875; 0,6875]$.
- $m = 0,6796875$; $f(m) \approx -0,006 \rightarrow a = 0,6796875$; intervalle $[0,6796875; 0,6875]$.

Ce dernier intervalle a pour largeur $0,0078125 \leq 0,01$: la boucle s'arrête.

Le script renvoie $(0,6796875; 0,6875)$.

Cet intervalle contient bien $\alpha \approx 0,6823$.

Question 2

Après n itérations, la largeur vaut $\frac{2-1}{2^n} = \frac{1}{2^n}$. On cherche $\frac{1}{2^n} \leq 10^{-3}$, soit $2^n \geq 1000$.
 Comme $2^9 = 512 < 1000$ et $2^{10} = 1024 \geq 1000$:
il faut 10 itérations.

Exercice 8 (★★) : l'équation $f(x) = k$

Soit $g(x) = x^3 + 2x$. Montrer que l'équation $g(x) = 5$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, puis l'encadrer à 10^{-1} près.

Correction de l'exercice 8

Existence et unicité. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme), donc continue.

Pour tout x , $g'(x) = 3x^2 + 2 > 0$: g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} g = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g = +\infty$, donc 5 est strictement compris entre ces limites.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

l'équation $g(x) = 5$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

Encadrement. On a $g(1) = 3 < 5$ et $g(2) = 12 > 5$, donc $\alpha \in]1; 2[$. Par pas de 0,1 :

$$g(1,3) = 2,197 + 2,6 = 4,797 < 5$$

$$g(1,4) = 2,744 + 2,8 = 5,544 > 5$$

Comme g est strictement croissante :

$$1,3 < \alpha < 1,4$$

Ce qui peut tomber au bac

- « Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution » puis un **encadrement** à 10^{-2} (exercices 1, 2, 8).
- Un **nombre de solutions** avec un tableau de variations (exercices 3 et 5).
- Un **algorithme de dichotomie** à exécuter ou à compléter (exercices 4 et 7).
- Une **suite définie par une équation** (exercice 6), qui mêle TVI, monotonie et limite.

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Le corollaire du TVI donne une solution unique si f est continue et :

- A. dérivable en a
- B. égale à k en a
- C. **strictement monotone sur $[a; b]$, avec k entre $f(a)$ et $f(b)$ (bonne réponse)**
- D. positive sur $[a; b]$

Justification : C'est la stricte monotonie qui garantit qu'une valeur n'est prise qu'une seule fois.

2. Dans la méthode de dichotomie, après avoir calculé $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, on garde :

- A. l'intervalle entier
- B. toujours la moitié droite
- C. toujours la moitié gauche
- D. **la moitié de l'intervalle où f change de signe (bonne réponse)**

Justification : On choisit la moitié qui contient encore la solution, celle où f prend des signes opposés aux bornes.

3. Après n étapes de dichotomie sur $[0; 1]$, l'amplitude de l'intervalle est :

- A. $\frac{1}{2n}$
- B. $\frac{1}{2^n}$ (bonne réponse)
- C. $\frac{n}{2}$
- D. $\frac{1}{n}$

Justification : L'amplitude est divisée par 2 à chaque étape.

4. Pour $f(x) = x^3 + x - 1$, on a $f(0,5) = -0,375$ et $f(1) = 1$. La solution α de $f(x) = 0$ est dans :

- A. $] - 1; 0[$
- B. $]0; 0,5[$
- C. $]0,5; 1[$ (bonne réponse)
- D. $]1; 2[$

Justification : $f(0,5) < 0 < f(1)$ et f est strictement croissante : $\alpha \in]0,5; 1[$.

5. Pour une amplitude inférieure à 10^{-3} en partant de $[0; 1]$, il faut au minimum :

- A. 100 étapes
- B. 1 000 étapes
- C. **10 étapes de dichotomie (bonne réponse)**
- D. 9 étapes

Justification : $2^{-9} \approx 1,95 \times 10^{-3} > 10^{-3}$ et $2^{-10} \approx 9,8 \times 10^{-4} < 10^{-3}$.

6. Dans l'exercice 1, avec $f(x) = x^3 + x - 1$, quel encadrement de la solution α obtient-on à 10^{-2} près ?

A. $0,5 < \alpha < 0,6$
 B. $0 < \alpha < 1$
 C. $0,68 < \alpha < 0,69$ (bonne réponse)
 D. $0,6 < \alpha < 0,7$

Justification : On resserre l'intervalle en évaluant f en des valeurs de plus en plus précises jusqu'à obtenir un écart de 10^{-2} .

7. Dans l'exercice 3, avec $f(x) = x^3 - 3x + 1$, combien de solutions réelles l'équation $f(x) = 0$ admet-elle exactement ?

A. 2
 B. 3 (bonne réponse)
 C. 0
 D. 1

Justification : f change de sens de variation deux fois (extremums locaux) et change de signe trois fois : trois solutions, une dans chaque intervalle de monotonie.

8. Dans l'exercice 5, avec $f(x) = x^3 - 3x$, pour $m = 0$, combien l'équation $f(x) = 0$ admet-elle de solutions ?

A. 0 solution
 B. 3 solutions (bonne réponse)
 C. 2 solutions
 D. 1 solution

Justification : $x^3 - 3x = x(x^2 - 3) = 0$ a pour solutions 0, $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$: trois solutions.

9. Dans l'exercice 6, avec $f_n(x) = x^n + x - 1$, que vaut α_2 , solution de $f_2(x) = 0$ sur $[0; 1]$?

A. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (bonne réponse)
 B. $\frac{1}{2}$
 C. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$
 D. 1

Justification : $x^2 + x - 1 = 0$ a pour discriminant 5 ; la solution positive est $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$.

10. Dans l'exercice 7, avec le script de dichotomie sur $f(x) = x^3 + x - 1$, $[0; 1]$ et une précision $\epsilon = 0,01$, quel couple le script renvoie-t-il ?

A. $(0; 1)$

B. $(0,6796875; 0,6875)$ (**bonne réponse**)

C. $(0,68; 0,69)$

D. $(0,5; 0,75)$

Justification : Chaque étape divise l'intervalle par 2 en gardant la moitié où f change de signe, jusqu'à une largeur inférieure à 0,01.