

Fiche 2 : le théorème des valeurs intermédiaires

Huit exercices sur l'utilisation du TVI pour prouver l'**existence** d'une solution : changement de signe, plusieurs solutions, point fixe, TVI avec limites, repérage d'erreurs de raisonnement.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac : continuité justifiée, valeurs calculées, hypothèse « k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ » vérifiée, phrase de conclusion.

Le modèle de rédaction du TVI

« La fonction f est continue sur $[a; b]$ (justification).

De plus $f(a) = \dots$ et $f(b) = \dots$, donc 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a; b]$. »

- Pour montrer **qu'une équation a au moins une solution**, on cherche un changement de signe.
- Pour une équation $f(x) = g(x)$, on pose $h = f - g$.
- Pour un **point fixe** $f(c) = c$, on pose $g(x) = f(x) - x$.

Les pièges classiques

- Appliquer le TVI sans justifier la **continuité** (c'est l'hypothèse la plus souvent oubliée).
- Dire que la solution est **unique** : le TVI donne seulement l'existence.
- Prendre un k qui n'est **pas compris** entre $f(a)$ et $f(b)$.
- Oublier de préciser l'intervalle où se trouve la solution.

Le TVI est un théorème d'existence : il te dit « la solution existe », pas « voici où elle habite ».

Exercice 1 (★) : le changement de signe

Montrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans $[0; 1]$.

Exercice 2 (★) : deux équations

1. Montrer que l'équation $x^2 = 2$ admet au moins une solution dans $[1; 2]$.
2. Montrer que l'équation $e^x = 3x$ admet au moins une solution dans $[0; 1]$.

Exercice 3 (★★) : avec le cosinus

Montrer que l'équation $\cos x = x$ admet au moins une solution dans $[0; 1]$.

Exercice 4 (★★★) : au moins trois solutions

Soit $p(x) = x^5 - 5x + 1$. Calculer $p(-2)$, $p(0)$, $p(1)$ et $p(2)$, puis montrer que l'équation $p(x) = 0$ admet au moins trois solutions distinctes.

Exercice 5 (★★) : un point fixe

Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$ et à valeurs dans $[0; 1]$ (c'est-à-dire $0 \leq f(x) \leq 1$ pour tout $x \in [0; 1]$). Montrer qu'il existe $c \in [0; 1]$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 6 (★★) : repérer les erreurs

Voici trois raisonnements d'élèves. Dans chaque cas, repère l'erreur et propose un contre-exemple.

1. « Soit $f(x) = \frac{1}{x}$. On a $f(-1) = -1 < 0$ et $f(2) = \frac{1}{2} > 0$. D'après le TVI, f s'annule sur $[-1; 2]$. »
2. « f est continue sur $[0; 3]$, $f(0) = 2$ et $f(3) = 5$. D'après le TVI, l'équation $f(x) = 6$ admet une solution dans $[0; 3]$. »
3. « f est continue sur $[0; 2]$, $f(0) = -3$ et $f(2) = 3$. D'après le TVI, f s'annule exactement une fois sur $[0; 2]$. »

Exercice 7 (★★) : une équation $f(x) = g(x)$

Montrer que l'équation $e^x = 2 - x$ admet au moins une solution dans $[0; 1]$.

Exercice 8 (★★★) : le TVI avec des limites

Soit $P(x) = x^5 + 3x + 7$. Montrer que l'équation $P(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Ce qui peut tomber au bac

- Un **changement de signe** à justifier (exercices 1, 2, 3, 7).
- Des **plusieurs solutions** avec un tableau de valeurs (exercice 4).
- Un **point fixe** avec $g(x) = f(x) - x$ (exercice 5).
- Un **TVI avec limites** sur un intervalle infini (exercice 8).
- Un **vrai/faux** qui teste les erreurs classiques (exercice 6).

QCM : une seule bonne réponse par question

- Le théorème des valeurs intermédiaires dit que si f est continue sur $[a; b]$ et si k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors $f(x) = k$ admet :
 - aucune solution
 - deux solutions
 - au moins une solution dans $[a; b]$
 - exactement une solution
- Pour affirmer qu'une solution est unique, on ajoute l'hypothèse que f est :
 - dérivable en a
 - paire
 - nulle en a
 - strictement monotone
- Pour $f(x) = x^3 + x - 1$ sur $[0; 1]$, on a $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$. Que peut-on dire ?
 - $f(x) = 0$ n'a pas de solution
 - $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[0; 1]$
 - f est décroissante
 - f est positive sur $[0; 1]$
- $f(x) = \frac{1}{x}$ vérifie $f(-1) = -1 < 0 < 1 = f(1)$ mais ne s'annule pas sur $[-1; 1]$. Pourquoi cela ne contredit-il pas le TVI ?
 - f n'est pas continue sur $[-1; 1]$
 - Le TVI est faux
 - f est décroissante
 - 0 n'est pas compris entre $f(-1)$ et $f(1)$
- Si f est continue sur $[0; 1]$ avec $f(0) = -2$ et $f(1) = 3$, alors f s'annule :
 - au moins une fois
 - exactement une fois

- C. jamais
- D. deux fois
6. Dans l'exercice 2, sur quel intervalle montre-t-on que l'équation $e^x = 3x$ admet une solution ?
- A. $[0; 1]$
- B. $[1; 2]$
- C. $[-1; 0]$
- D. $\mathbb{R}$
7. Dans l'exercice 4, avec $p(x) = x^5 - 5x + 1$, combien de solutions distinctes l'équation $p(x) = 0$ admet-elle au moins ?
- A. 2
- B. 1
- C. 3
- D. 5
8. Dans l'exercice 5 (point fixe), quelle hypothèse est essentielle sur f pour appliquer le TVI à $g(x) = f(x) - x$?
- A. f dérivable
- B. f continue sur $[0; 1]$
- C. f positive
- D. f strictement croissante
9. Dans l'exercice 6, quelle est l'erreur du raisonnement sur $f(x) = \frac{1}{x}$ avec $f(-1) = -1$ et $f(2) = \frac{1}{2}$?
- A. $f(-1)$ et $f(2)$ ont le même signe
- B. Il manque une hypothèse de dérivabilité
- C. Le TVI ne s'applique jamais aux fonctions négatives
- D. f n'est pas continue sur $[-1; 2]$ (elle n'est pas définie en 0)
10. Dans l'exercice 8, avec $P(x) = x^5 + 3x + 7$, sur quel type d'intervalle cherche-t-on une solution ?
- A. Seulement $[0; 1]$
- B. Seulement les entiers
- C. $[-7; 7]$
- D. $\mathbb{R}$ tout entier, en utilisant les limites en $-\infty$ et $+\infty$