

Fiche 2 : le théorème des valeurs intermédiaires

Huit exercices sur l'utilisation du TVI pour prouver l'**existence** d'une solution : changement de signe, plusieurs solutions, point fixe, TVI avec limites, repérage d'erreurs de raisonnement.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac : continuité justifiée, valeurs calculées, hypothèse « k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ » vérifiée, phrase de conclusion.

Le modèle de rédaction du TVI

« La fonction f est continue sur $[a; b]$ (justification).

De plus $f(a) = \dots$ et $f(b) = \dots$, donc 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a; b]$. »

- Pour montrer **qu'une équation a au moins une solution**, on cherche un changement de signe.
- Pour une équation $f(x) = g(x)$, on pose $h = f - g$.
- Pour un **point fixe** $f(c) = c$, on pose $g(x) = f(x) - x$.

Les pièges classiques

- Appliquer le TVI sans justifier la **continuité** (c'est l'hypothèse la plus souvent oubliée).
- Dire que la solution est **unique** : le TVI donne seulement l'existence.
- Prendre un k qui n'est **pas compris** entre $f(a)$ et $f(b)$.
- Oublier de préciser l'intervalle où se trouve la solution.

Le TVI est un théorème d'existence : il te dit « la solution existe », pas « voici où elle habite ».

Exercice 1 (★) : le changement de signe

Montrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans $[0; 1]$.

Correction de l'exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x - 1$. La fonction f est un polynôme, donc elle est continue sur $[0; 1]$.

De plus $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 + 1 - 1 = 1 > 0$. Donc 0 est compris entre $f(0)$ et $f(1)$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires :

l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution c dans $[0; 1]$.

Comme $f(0) \neq 0$ et $f(1) \neq 0$, on a même $c \in]0; 1[$.

Exercice 2 (★) : deux équations

1. Montrer que l'équation $x^2 = 2$ admet au moins une solution dans $[1; 2]$.
2. Montrer que l'équation $e^x = 3x$ admet au moins une solution dans $[0; 1]$.

Correction de l'exercice 2

Question 1

Soit $f(x) = x^2 - 2$, un polynôme, donc continu sur $[1; 2]$. On a $f(1) = -1 < 0$ et $f(2) = 2 > 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]1; 2[$ tel que $f(c) = 0$, c'est-à-dire $c^2 = 2$.

L'équation $x^2 = 2$ admet au moins une solution dans $[1; 2]$.

Question 2

Soit $g(x) = e^x - 3x$. La fonction g est continue sur $[0; 1]$, comme différence de fonctions continues. On a $g(0) = e^0 - 0 = 1 > 0$ et $g(1) = e - 3 < 0$ car $e < 3$. Donc 0 est compris entre $g(1)$ et $g(0)$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires :

il existe $c \in]0; 1[$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire $e^c = 3c$.

Exercice 3 (★★) : avec le cosinus

Montrer que l'équation $\cos x = x$ admet au moins une solution dans $[0; 1]$.

Correction de l'exercice 3

Soit $h(x) = \cos x - x$. La fonction h est continue sur $[0; 1]$, comme différence de deux fonctions continues (le cosinus est continu sur $\mathbb{R}$).

On a $h(0) = \cos 0 - 0 = 1 > 0$. Et $h(1) = \cos 1 - 1$. Comme $\cos 1 < 1$ ($\cos 1 \approx 0,54$), $h(1) < 0$. Donc 0 est compris entre $h(1)$ et $h(0)$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires :

l'équation $h(x) = 0$, c'est-à-dire $\cos x = x$, admet au moins une solution dans $]0; 1[$.

Exercice 4 (★★★) : au moins trois solutions

Soit $p(x) = x^5 - 5x + 1$. Calculer $p(-2)$, $p(0)$, $p(1)$ et $p(2)$, puis montrer que l'équation $p(x) = 0$ admet au moins trois solutions distinctes.

Correction de l'exercice 4

Les valeurs

$$p(-2) = -32 + 10 + 1 = -21$$

$$p(0) = 1$$

$$p(1) = 1 - 5 + 1 = -3$$

$$p(2) = 32 - 10 + 1 = 23$$

Le TVI sur trois intervalles

La fonction p est un polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}$.

- Sur $[-2; 0]$: $p(-2) < 0 < p(0)$. D'après le TVI, il existe une solution dans $] - 2; 0[$.
- Sur $[0; 1]$: $p(1) < 0 < p(0)$. D'après le TVI, il existe une solution dans $]0; 1[$.
- Sur $[1; 2]$: $p(1) < 0 < p(2)$. D'après le TVI, il existe une solution dans $]1; 2[$.

Les trois intervalles $] - 2; 0[$, $]0; 1[$ et $]1; 2[$ sont deux à deux disjoints.

L'équation $p(x) = 0$ admet donc au moins trois solutions distinctes.

Remarque : le TVI ne permet pas de dire qu'il y en a **exactement** trois. Pour cela, il faudrait la stricte monotonie sur chaque intervalle (corollaire, fiche 3).

Exercice 5 (★★) : un point fixe

Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$ et à valeurs dans $[0; 1]$ (c'est-à-dire $0 \leq f(x) \leq 1$ pour tout $x \in [0; 1]$). Montrer qu'il existe $c \in [0; 1]$ tel que $f(c) = c$.

Correction de l'exercice 5

Soit g la fonction définie sur $[0; 1]$ par $g(x) = f(x) - x$. La fonction g est continue sur $[0; 1]$, comme différence de deux fonctions continues.

On a $g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0$, car f est à valeurs dans $[0; 1]$. De même $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$, car $f(1) \leq 1$. Donc 0 est compris entre $g(1)$ et $g(0)$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0; 1]$ tel que $g(c) = 0$.

Donc $f(c) = c$.

Remarque : c peut être une des extrémités (si $f(0) = 0$ ou $f(1) = 1$), d'où l'intervalle fermé.

Exercice 6 (★★) : repérer les erreurs

Voici trois raisonnements d'élèves. Dans chaque cas, repère l'erreur et propose un contre-exemple.

- « Soit $f(x) = \frac{1}{x}$. On a $f(-1) = -1 < 0$ et $f(2) = \frac{1}{2} > 0$. D'après le TVI, f s'annule sur $[-1; 2]$. »
- « f est continue sur $[0; 3]$, $f(0) = 2$ et $f(3) = 5$. D'après le TVI, l'équation $f(x) = 6$ admet une solution dans $[0; 3]$. »
- « f est continue sur $[0; 2]$, $f(0) = -3$ et $f(2) = 3$. D'après le TVI, f s'annule exactement une fois sur $[0; 2]$. »

Correction de l'exercice 6

Raisonnement 1

La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas définie en 0, donc elle n'est pas continue sur $[-1; 2]$.

L'hypothèse de continuité du TVI n'est pas vérifiée.

En fait, $\frac{1}{x}$ ne s'annule jamais.

Raisonnement 2

Le nombre 6 n'est pas compris entre $f(0) = 2$ et $f(3) = 5$. Le TVI ne s'applique pas. Contre-exemple : $f(x) = x + 2$ est continue, $f(0) = 2$, $f(3) = 5$, et $f(x) = 6$ équivaut à $x = 4$, qui n'est pas dans $[0; 3]$.

Raisonnement 3

Le TVI donne seulement l'**existence** (au moins une solution), pas l'unicité.

Contre-exemple : $f(x) = (2x - 1)(x - 1)(2x - 3)$ est un polynôme, $f(0) = -3$, $f(2) = 3$.

Et f s'annule en $\frac{1}{2}$, 1 et $\frac{3}{2}$: trois fois sur $[0; 2]$.

Exercice 7 (★★) : une équation $f(x) = g(x)$

Montrer que l'équation $e^x = 2 - x$ admet au moins une solution dans $[0; 1]$.

Correction de l'exercice 7

Soit $h(x) = e^x - (2 - x) = e^x + x - 2$. La fonction h est continue sur $[0; 1]$, comme somme de fonctions continues. Résoudre $e^x = 2 - x$ revient à résoudre $h(x) = 0$.

On a $h(0) = 1 + 0 - 2 = -1 < 0$. Et $h(1) = e + 1 - 2 = e - 1 > 0$ (car $e > 1$). Donc 0 est compris entre $h(0)$ et $h(1)$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires :

l'équation $h(x) = 0$, c'est-à-dire $e^x = 2 - x$, admet au moins une solution dans $]0; 1[$.

Exercice 8 (★★★) : le TVI avec des limites

Soit $P(x) = x^5 + 3x + 7$. Montrer que l'équation $P(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 8

La fonction P est un polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}$.

Limite en $+\infty$. Quand $x \rightarrow +\infty$, $x^5 \rightarrow +\infty$ et $3x \rightarrow +\infty$, donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$. Par définition de la limite, il existe un réel B tel que $P(x) > 0$ pour tout $x \geq B$.

Limite en $-\infty$. Quand $x \rightarrow -\infty$, $x^5 \rightarrow -\infty$ et $3x \rightarrow -\infty$, donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty$.

Par définition de la limite, il existe un réel A tel que $P(x) < 0$ pour tout $x \leq A$.

Quitte à diminuer A , on peut supposer $A < B$.

Conclusion. Alors P est continue sur $[A; B]$, avec $P(A) < 0 < P(B)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires :

il existe $c \in]A; B[$ tel que $P(c) = 0$.

À retenir : tout polynôme de degré impair s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$. Ici, on peut le vérifier directement : $P(-2) = -31 < 0$ et $P(-1) = 3 > 0$, donc la solution est dans $] -2; -1[$.

Ce qui peut tomber au bac

- Un **changement de signe** à justifier (exercices 1, 2, 3, 7).
- Des **plusieurs solutions** avec un tableau de valeurs (exercice 4).
- Un **point fixe** avec $g(x) = f(x) - x$ (exercice 5).
- Un **TVI avec limites** sur un intervalle infini (exercice 8).
- Un **vrai/faux** qui teste les erreurs classiques (exercice 6).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Le théorème des valeurs intermédiaires dit que si f est continue sur $[a; b]$ et si k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors $f(x) = k$ admet :
- A. aucune solution
 - B. deux solutions
 - C. **au moins une solution dans $[a; b]$ (bonne réponse)**
 - D. exactement une solution

Justification : Le TVI donne l'existence, pas l'unicité.

2. Pour affirmer qu'une solution est unique, on ajoute l'hypothèse que f est :
- A. dérivable en a
 - B. paire
 - C. nulle en a
 - D. **strictement monotone (bonne réponse)**

Justification : Continue et strictement monotone : c'est le corollaire du TVI, qui donne une unique solution.

3. Pour $f(x) = x^3 + x - 1$ sur $[0; 1]$, on a $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$. Que peut-on dire ?
- A. $f(x) = 0$ n'a pas de solution
 - B. $f(x) = 0$ **admet au moins une solution dans $[0; 1]$ (bonne réponse)**
 - C. f est décroissante
 - D. f est positive sur $[0; 1]$

Justification : f est continue et 0 est compris entre -1 et 1 : le TVI s'applique.

4. $f(x) = \frac{1}{x}$ vérifie $f(-1) = -1 < 0 < 1 = f(1)$ mais ne s'annule pas sur $[-1; 1]$. Pourquoi cela ne contredit-il pas le TVI ?
- A. **f n'est pas continue sur $[-1; 1]$ (bonne réponse)**
 - B. Le TVI est faux
 - C. f est décroissante

D. 0 n'est pas compris entre $f(-1)$ et $f(1)$

Justification : La fonction n'est pas définie en 0 : l'hypothèse de continuité sur tout l'intervalle n'est pas vérifiée.

5. Si f est continue sur $[0; 1]$ avec $f(0) = -2$ et $f(1) = 3$, alors f s'annule :

A. **au moins une fois (bonne réponse)**

B. exactement une fois

C. jamais

D. deux fois

Justification : 0 est compris entre -2 et 3 : le TVI garantit au moins un zéro.

6. Dans l'exercice 2, sur quel intervalle montre-t-on que l'équation $e^x = 3x$ admet une solution ?

A. $[0; 1]$ **(bonne réponse)**

B. $[1; 2]$

C. $[-1; 0]$

D. $\mathbb{R}$

Justification : On pose $g(x) = e^x - 3x$: $g(0) = 1 > 0$ et $g(1) = e - 3 < 0$, donc le TVI s'applique sur $[0; 1]$.

7. Dans l'exercice 4, avec $p(x) = x^5 - 5x + 1$, combien de solutions distinctes l'équation $p(x) = 0$ admet-elle au moins ?

A. 2

B. 1

C. **3 (bonne réponse)**

D. 5

Justification : $p(-2) = -21 < 0$, $p(0) = 1 > 0$, $p(1) = -3 < 0$, $p(2) = 23 > 0$: le signe change trois fois, donc au moins trois solutions.

8. Dans l'exercice 5 (point fixe), quelle hypothèse est essentielle sur f pour appliquer le TVI à $g(x) = f(x) - x$?

A. f dérivable

B. **f continue sur $[0; 1]$ (bonne réponse)**

C. f positive

D. f strictement croissante

Justification : On étudie $g(x) = f(x) - x$, continue comme différence de fonctions continues, avec $g(0) \geq 0$ et $g(1) \leq 0$.

9. Dans l'exercice 6, quelle est l'erreur du raisonnement sur $f(x) = \frac{1}{x}$ avec $f(-1) = -1$ et $f(2) = \frac{1}{2}$?

A. $f(-1)$ et $f(2)$ ont le même signe

- B. Il manque une hypothèse de dérivabilité
- C. Le TVI ne s'applique jamais aux fonctions négatives
- D. **f n'est pas continue sur $[-1; 2]$ (elle n'est pas définie en 0) (bonne réponse)**

Justification : $\frac{1}{x}$ n'est pas définie (donc pas continue) en $0 \in [-1; 2]$: l'hypothèse de continuité sur tout l'intervalle manque.

10. Dans l'exercice 8, avec $P(x) = x^5 + 3x + 7$, sur quel type d'intervalle cherche-t-on une solution ?

- A. Seulement $[0; 1]$
- B. Seulement les entiers
- C. $[-7; 7]$
- D. **$\mathbb{R}$ tout entier, en utilisant les limites en $-\infty$ et $+\infty$ (bonne réponse)**

Justification : P est continue sur $\mathbb{R}$, tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $+\infty$: le TVI s'applique globalement.