

Fiche 1 : continuité en un point

Huit exercices sur la continuité en un point : limites à gauche et à droite, fonctions définies par morceaux, paramètres, prolongement par continuité, lien avec les suites.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac : les trois nombres (limite à gauche, limite à droite, valeur) sont écrits, puis comparés, avec une phrase de conclusion.

Les réflexes à avoir en tête

- **Continuité en a :** calcule $\lim_{x \rightarrow a^-} f$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f$ et $f(a)$, puis compare les trois.
- **Paramètre :** écris l'égalité des trois nombres, résous l'équation en le paramètre.
- **Prolongement :** factorise pour lever la forme $\frac{0}{0}$, puis pose $f(a) =$ la limite.
- Une fonction usuelle est continue sur son ensemble de définition : ne calcule les limites que là où la formule change.

Les pièges classiques

- Comparer seulement les deux limites en oubliant $f(a)$.
- Confondre « limite qui existe » et « continue » : il faut $\lim = f(a)$.
- Croire que continue implique dérivable (faux : $|x|$ en 0).
- Oublier de préciser de quel côté on calcule ($x \rightarrow a^-$ ou $x \rightarrow a^+$).

Pour qu'une courbe soit continue, il faut que les deux morceaux se donnent rendez-vous au même point. Si l'un arrive à 1 et l'autre repart de 2, il y a un saut.

Exercice 1 (★) : une fonction par morceaux

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = x^2 + 1$ si $x < 0$;
- $f(x) = 2x + 1$ si $x \geq 0$.

La fonction f est-elle continue en 0 ?

Exercice 2 (★) : continue ou pas ?

Étudier la continuité :

1. $f(x) = x + 1$ si $x < 1$ et $f(x) = 3 - x$ si $x \geq 1$, en 1.
2. $g(x) = x$ si $x \leq 0$ et $g(x) = x + 1$ si $x > 0$, en 0.

Exercice 3 (★★) : déterminer un paramètre

1. Soit f définie par $f(x) = ax + 1$ si $x < 2$ et $f(x) = x^2 - 1$ si $x \geq 2$. Déterminer a pour que f soit continue en 2.
2. Soit g définie par $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ si $x \neq 1$ et $g(1) = k$. Déterminer k pour que g soit continue en 1.

Exercice 4 (★★) : prolongement par continuité

Dans chaque cas, montrer que f se prolonge par continuité au point indiqué, et donner la valeur du prolongement :

1. $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$, en 3.
2. $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$, en 2.
3. $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$, en 0.

Exercice 5 (★★) : continue et dérivable

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ si $x \leq 0$ et $f(x) = x + 1$ si $x > 0$.

1. Montrer que f est continue en 0.
2. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
3. Comparer avec la fonction valeur absolue en 0.

Exercice 6 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .
2. Si f est continue en a , alors f est dérivable en a .
3. Si f est définie en a et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe, alors f est continue en a .
4. La somme de deux fonctions non continues en a n'est jamais continue en a .
5. Le produit de deux fonctions continues en a est continu en a .
6. Si f est continue sur I et ne s'annule pas sur I , alors $\frac{1}{f}$ est continue sur I .

Exercice 7 (★★★) : la partie entière

On note $E(x)$ la partie entière de x (le plus grand entier inférieur ou égal à x).

1. La fonction E est-elle continue en 2 ? en 2,5 ?
2. Soit $g(x) = x - E(x)$. Est-elle continue en 2 ?

Exercice 8 (★★★) : continuité et suites

On définit $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$.
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. En déduire que (u_n) converge, puis déterminer sa limite en justifiant l'égalité utilisée.

Ce qui peut tomber au bac

- La **continuité d'une fonction par morceaux** avec un paramètre (exercices 1 à 3).
- Un **prolongement par continuité** après avoir levé une forme $\frac{0}{0}$ (exercice 4).
- Le lien **continuité et dérivabilité** (exercices 5 et 6).
- La **justification de $\ell = f(\ell)$** pour une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ (exercice 8).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Une fonction f est continue en a si :
 - A. f est définie en a
 - B. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
 - C. f est dérivable en a
 - D. $f(a) = 0$
2. La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est :
 - A. continue en 0 mais non dérivable en 0
 - B. discontinue en 0
 - C. dérivable en 0
 - D. ni continue ni dérivable en 0
3. Toute fonction dérivable sur un intervalle est :
 - A. monotone
 - B. continue sur cet intervalle

- C. constante
 - D. croissante
4. Soit $f(x) = x + 1$ si $x < 1$ et $f(x) = 3$ si $x \geq 1$. En 1, la fonction f est :
- A. discontinue
 - B. continue
 - C. dérivable
 - D. non définie
5. La fonction partie entière $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est discontinue :
- A. en chaque entier
 - B. nulle part
 - C. seulement en 0
 - D. partout
6. Dans l'exercice 3, avec $f(x) = ax + 1$ si $x < 2$ et $f(x) = x^2 - 1$ si $x \geq 2$, pour quelle valeur de a la fonction f est-elle continue en 2 ?
- A. $a = 3$
 - B. $a = 2$
 - C. $a = 0$
 - D. $a = 1$
7. Dans l'exercice 4, quelle est la valeur du prolongement par continuité de $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ en 3 ?
- A. 9
 - B. 0
 - C. 3
 - D. 6
8. Dans l'exercice 5, avec $f(x) = e^x$ si $x \leq 0$ et $f(x) = x + 1$ si $x > 0$, la fonction f est-elle dérivable en 0 ?
- A. On ne peut pas savoir
 - B. Non
 - C. Oui, avec $f'(0) = 0$
 - D. Oui, avec $f'(0) = 1$
9. Dans l'exercice 7, la fonction partie entière E est-elle continue en 2,5 ?
- A. Oui
 - B. Non
 - C. Seulement à droite
 - D. Seulement à gauche

10. Dans l'exercice 8, avec $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$, quelle est la limite de (u_n) ?

- A. 1
- B. $+\infty$
- C. $\sqrt{2}$
- D. 2