

Fiche 1 : continuité en un point

Huit exercices sur la continuité en un point : limites à gauche et à droite, fonctions définies par morceaux, paramètres, prolongement par continuité, lien avec les suites.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac : les trois nombres (limite à gauche, limite à droite, valeur) sont écrits, puis comparés, avec une phrase de conclusion.

Les réflexes à avoir en tête

- **Continuité en a :** calcule $\lim_{x \rightarrow a^-} f$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f$ et $f(a)$, puis compare les trois.
- **Paramètre :** écris l'égalité des trois nombres, résous l'équation en le paramètre.
- **Prolongement :** factorise pour lever la forme $\frac{0}{0}$, puis pose $f(a) =$ la limite.
- Une fonction usuelle est continue sur son ensemble de définition : ne calcule les limites que là où la formule change.

Les pièges classiques

- Comparer seulement les deux limites en oubliant $f(a)$.
- Confondre « limite qui existe » et « continue » : il faut $\lim = f(a)$.
- Croire que continue implique dérivable (faux : $|x|$ en 0).
- Oublier de préciser de quel côté on calcule ($x \rightarrow a^-$ ou $x \rightarrow a^+$).

Pour qu'une courbe soit continue, il faut que les deux morceaux se donnent rendez-vous au même point. Si l'un arrive à 1 et l'autre repart de 2, il y a un saut.

Exercice 1 (★) : une fonction par morceaux

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = x^2 + 1$ si $x < 0$;
- $f(x) = 2x + 1$ si $x \geq 0$.

La fonction f est-elle continue en 0 ?

Correction de l'exercice 1

Méthode. On calcule les trois nombres en 0.

Limite à gauche. Pour $x < 0$, $f(x) = x^2 + 1$. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0^2 + 1 = 1$ (les polynômes sont continus).

Limite à droite. Pour $x \geq 0$, $f(x) = 2x + 1$. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 \times 0 + 1 = 1$.

Valeur. $f(0) = 2 \times 0 + 1 = 1.$

On a $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 1.$

Donc f est continue en 0.

Exercice 2 (★) : continue ou pas ?

Étudier la continuité :

1. $f(x) = x + 1$ si $x < 1$ et $f(x) = 3 - x$ si $x \geq 1$, en 1.
2. $g(x) = x$ si $x \leq 0$ et $g(x) = x + 1$ si $x > 0$, en 0.

Correction de l'exercice 2

Question 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 - 1 = 2$$

$$f(1) = 3 - 1 = 2$$

Les trois nombres sont égaux.

Donc f est continue en 1.

Question 2

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0 + 1 = 1$$

$$g(0) = 0$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$, la fonction g n'a pas de limite en 0.

Donc g n'est pas continue en 0 : sa courbe fait un saut de 0 à 1.

Exercice 3 (★★) : déterminer un paramètre

1. Soit f définie par $f(x) = ax + 1$ si $x < 2$ et $f(x) = x^2 - 1$ si $x \geq 2$. Déterminer a pour que f soit continue en 2.
2. Soit g définie par $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ si $x \neq 1$ et $g(1) = k$. Déterminer k pour que g soit continue en 1.

Correction de l'exercice 3

Question 1

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2a + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2^2 - 1 = 3$$

$$f(2) = 2^2 - 1 = 3$$

La fonction f est continue en 2 si et seulement si $2a + 1 = 3$, c'est-à-dire $a = 1$.

Donc f est continue en 2 si et seulement si $a = 1$.

Question 2

Pour $x \neq 1$, $g(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$. Donc $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$.

La fonction g est continue en 1 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1)$, c'est-à-dire $2 = k$.

Donc g est continue en 1 si et seulement si $k = 2$.

Exercice 4 (★★) : prolongement par continuité

Dans chaque cas, montrer que f se prolonge par continuité au point indiqué, et donner la valeur du prolongement :

1. $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$, en 3.

2. $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$, en 2.

3. $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$, en 0.

Correction de l'exercice 4

Méthode. Dans chaque cas, f n'est pas définie au point considéré. On cherche la limite finie en ce point (forme « $\frac{0}{0}$ »).

Question 1

Pour $x \neq 3$, $f(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3$. Donc $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$. On prolonge f par continuité en posant :

$$f(3) = 6$$

Question 2

Pour $x \neq 2$, $x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$, donc $f(x) = x^2 + 2x + 4$. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 + 4 + 4 = 12$. On prolonge en posant :

$$f(2) = 12$$

Question 3

Pour $x > -1$, $x \neq 0$:

$$f(x) = \frac{(x+1)-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$$

Et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$. On prolonge en posant :

$$f(0) = \frac{1}{2}$$

Exercice 5 (★★) : continue et dérivable

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ si $x \leq 0$ et $f(x) = x + 1$ si $x > 0$.

1. Montrer que f est continue en 0.
2. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
3. Comparer avec la fonction valeur absolue en 0.

Correction de l'exercice 5

Question 1

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = e^0 = 1 \text{ (continuité de l'exponentielle)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 + 1 = 1$$

$$f(0) = e^0 = 1$$

Les trois nombres sont égaux.

Donc f est continue en 0.

Question 2

Pour $x < 0$, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{e^x - 1}{x}$. Il tend vers le nombre dérivé de l'exponentielle en 0, soit 1.

Pour $x > 0$, $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x + 1 - 1}{x} = 1$, qui tend vers 1.

Les deux limites sont égales.

Donc f est dérivable en 0, avec $f'(0) = 1$.

Question 3

Pour la valeur absolue, le taux d'accroissement en 0 vaut $\frac{|x|}{x} = -1$ pour $x < 0$ et 1 pour $x > 0$.

Les limites à gauche et à droite diffèrent.

La valeur absolue est continue en 0 mais **n'est pas dérivable** en 0.

La continuité n'entraîne pas la dérivabilité.

Exercice 6 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .
2. Si f est continue en a , alors f est dérivable en a .
3. Si f est définie en a et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe, alors f est continue en a .
4. La somme de deux fonctions non continues en a n'est jamais continue en a .
5. Le produit de deux fonctions continues en a est continu en a .
6. Si f est continue sur I et ne s'annule pas sur I , alors $\frac{1}{f}$ est continue sur I .

Correction de l'exercice 6

Affirmation 1

C'est un théorème : une fonction dérivable en a est continue en a .

Vrai.

Affirmation 2

Contre-exemple : la valeur absolue est continue en 0 et n'y est pas dérivable.

Faux.

Affirmation 3

Il faut que la limite soit égale à $f(a)$. Contre-exemple : $f(x) = x^2$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$: la limite en 0 vaut 0, mais $f(0) = 1$.

Faux.

Affirmation 4

Contre-exemple : $f(x) = 1$ si $x \geq 0$ et 0 sinon, et $g = 1 - f$. Ni f ni g n'est continue en 0, mais $f + g = 1$ est constante, donc continue.

Faux.

Affirmation 5

Le produit de deux fonctions continues est continu.

Vrai.

Affirmation 6

L'inverse d'une fonction continue est continue là où elle ne s'annule pas.

Vrai.

Exercice 7 (★★★) : la partie entière

On note $E(x)$ la partie entière de x (le plus grand entier inférieur ou égal à x).

1. La fonction E est-elle continue en 2 ? en 2,5 ?
2. Soit $g(x) = x - E(x)$. Est-elle continue en 2 ?

Correction de l'exercice 7

Question 1

En 2. Pour $x \in [1; 2[$, $E(x) = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow 2^-} E(x) = 1$. Pour $x \in [2; 3[$, $E(x) = 2$, donc

$\lim_{x \rightarrow 2^+} E(x) = 2$ et $E(2) = 2$. Les limites à gauche et à droite diffèrent.

E n'est pas continue en 2.

En 2,5. Sur l'intervalle $]2; 3[$ qui contient 2,5, E est constante égale à 2. Donc $\lim_{x \rightarrow 2,5} E(x) = 2 = E(2,5)$.

E est continue en 2,5.

Question 2

Pour $x \in [1; 2[$, $g(x) = x - 1$, donc $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 1$. Or $g(2) = 2 - 2 = 0$. Comme $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 1 \neq 0 = g(2)$:

g n'est pas continue en 2 : la courbe fait un saut de 1 à 0.

Exercice 8 (★★★) : continuité et suites

On définit $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$.
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. En déduire que (u_n) converge, puis déterminer sa limite en justifiant l'égalité utilisée.

Correction de l'exercice 8

Question 1

Soit $P(n)$ la propriété : « $1 \leq u_n \leq 2$ ».

Initialisation. $u_0 = 1$, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $1 \leq u_k \leq 2$. Alors $2 \leq 2u_k \leq 4$. La racine carrée étant strictement croissante sur $[0; +\infty[$: $\sqrt{2} \leq u_{k+1} \leq 2$. Comme $1 \leq \sqrt{2}$, on a $1 \leq u_{k+1} \leq 2$: $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion.

Donc $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n} - u_n = \frac{2u_n - u_n^2}{\sqrt{2u_n} + u_n} = \frac{u_n(2 - u_n)}{\sqrt{2u_n} + u_n}$$

D'après la question 1, $u_n > 0$ et $2 - u_n \geq 0$, donc le numérateur est positif ou nul. Le dénominateur est strictement positif. Donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

(u_n) est croissante.

Question 3

La suite (u_n) est croissante et majorée par 2. D'après le théorème de convergence monotone : **elle converge vers un réel ℓ , avec $1 \leq \ell \leq 2$ (passage à la limite dans l'encadrement).**

Justification de l'égalité $\ell = f(\ell)$. Soit $f : x \mapsto \sqrt{2x}$, continue sur $[0; +\infty[$ (composée de $x \mapsto 2x$ et de la racine carrée).

Comme $u_n \rightarrow \ell$ avec $\ell \in [1; 2] \subset [0; +\infty[$ et que f est continue en ℓ , $f(u_n) \rightarrow f(\ell)$.

Or $f(u_n) = u_{n+1} \rightarrow \ell$.

Par unicité de la limite, $\ell = f(\ell) = \sqrt{2\ell}$.

Comme $\ell \geq 0$, cela entraîne $\ell^2 = 2\ell$, soit $\ell(\ell - 2) = 0$, donc $\ell = 0$ ou $\ell = 2$. Comme $\ell \geq 1$, $\ell = 0$ est exclu.

Donc $\lim u_n = 2$.

Ce qui peut tomber au bac

- La **continuité d'une fonction par morceaux** avec un paramètre (exercices 1 à 3).
- Un **prolongement par continuité** après avoir levé une forme $\frac{0}{0}$ (exercice 4).
- Le lien **continuité et dérivabilité** (exercices 5 et 6).
- La **justification de $\ell = f(\ell)$** pour une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ (exercice 8).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Une fonction f est continue en a si :

- A. f est définie en a
- B. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (**bonne réponse**)
- C. f est dérivable en a
- D. $f(a) = 0$

Justification : La continuité en a exprime que la limite en a existe et vaut $f(a)$.

2. La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est :

- A. **continue en 0 mais non dérivable en 0 (bonne réponse)**
- B. discontinue en 0
- C. dérivable en 0
- D. ni continue ni dérivable en 0

Justification : Sa courbe présente un « pic » en 0 sans coupure : continue, mais pas de tangente unique.

3. Toute fonction dérivable sur un intervalle est :

- A. monotone
- B. **continue sur cet intervalle (bonne réponse)**
- C. constante

D. croissante

Justification : La dérivabilité entraîne la continuité. La réciproque est fausse.

4. Soit $f(x) = x + 1$ si $x < 1$ et $f(x) = 3$ si $x \geq 1$. En 1, la fonction f est :

A. **discontinue (bonne réponse)**

B. continue

C. dérivable

D. non définie

Justification : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$ alors que $f(1) = 3$: la limite à gauche est différente de $f(1)$.

5. La fonction partie entière $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est discontinue :

A. **en chaque entier (bonne réponse)**

B. nulle part

C. seulement en 0

D. partout

Justification : La partie entière « saute » d'une unité à chaque entier.

6. Dans l'exercice 3, avec $f(x) = ax + 1$ si $x < 2$ et $f(x) = x^2 - 1$ si $x \geq 2$, pour quelle valeur de a la fonction f est-elle continue en 2 ?

A. $a = 3$

B. $a = 2$

C. $a = 0$

D. $a = 1$ **(bonne réponse)**

Justification : $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2a + 1$ doit être égal à $f(2) = 3$, donc $2a + 1 = 3$ et $a = 1$.

7. Dans l'exercice 4, quelle est la valeur du prolongement par continuité de $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ en 3 ?

A. 9

B. 0

C. 3

D. 6 **(bonne réponse)**

Justification : Pour $x \neq 3$, $f(x) = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3$, qui tend vers 6 quand $x \rightarrow 3$.

8. Dans l'exercice 5, avec $f(x) = e^x$ si $x \leq 0$ et $f(x) = x + 1$ si $x > 0$, la fonction f est-elle dérivable en 0 ?

A. On ne peut pas savoir

B. Non

C. Oui, avec $f'(0) = 0$

D. **Oui, avec $f'(0) = 1$ (bonne réponse)**

Justification : Les deux morceaux ont le même nombre dérivé en 0 (celui de e^x vaut 1, celui de $x + 1$ aussi) : f est dérivable en 0.

9. Dans l'exercice 7, la fonction partie entière E est-elle continue en 2,5 ?

- A. **Oui (bonne réponse)**
- B. Non
- C. Seulement à droite
- D. Seulement à gauche

Justification : 2,5 n'est pas un entier : E est constante (égale à 2) sur un voisinage de 2,5, donc continue en ce point.

10. Dans l'exercice 8, avec $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$, quelle est la limite de (u_n) ?

- A. 1
- B. $+\infty$
- C. $\sqrt{2}$
- D. **2 (bonne réponse)**

Justification : (u_n) est croissante et majorée par 2 : elle converge vers ℓ tel que $\ell = \sqrt{2\ell}$, avec $\ell \geq 1$, donc $\ell = 2$.