

Contrôle : chapitre 3, Continuité et TVI

Durée : 60 minutes. **Calculatrice** : autorisée. **Barème** : 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (6 points) : Continuité en un point

Dans cet exercice, a désigne un nombre réel. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax + 5 \text{ si } x < 2 \text{ et } f(x) = x^2 - 3 \text{ si } x \geq 2.$$

1. Déterminer la valeur de a pour laquelle f est continue en 2. Pour cette valeur de a , la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? (2 points)

2. Soit b un réel et h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$ si $x \neq 3$ et $h(3) = b$.

Déterminer la valeur de b pour laquelle h est continue en 3. (1,5 points)

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$. On admet que (u_n) converge vers un réel ℓ . Justifier que $\ell = \sqrt{2\ell + 3}$, puis déterminer la valeur de ℓ . (2,5 points)

Exercice 2 (8 points) : Deux solutions pour une équation

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - 2x - 2$. On admet que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

1. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations complet (limites et valeur du minimum). (2 points)

2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions, notées α et β avec $\alpha < \beta$. Montrer que $-1 < \alpha < 0$ et $1 < \beta < 2$. (3 points)

3. On considère le script Python ci-dessous. Déterminer le couple renvoyé par l'appel `dichotomie(f, 1, 2, 0.1)` en détaillant les étapes (valeurs de m et signe de $f(m)$, arrondi à 10^{-2}), puis interpréter ce résultat pour β . (2 points)

4. Combien d'itérations de la boucle `while` faut-il, au minimum, pour obtenir avec `dichotomie(f, 1, 2, 0.001)` un encadrement de β d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-3} ? (1 point)

Exercice 3 (6 points) : Points fixes

1. Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$ telle que, pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x) \in [0; 1]$. En considérant la fonction g définie sur $[0; 1]$ par $g(x) = f(x) - x$, démontrer qu'il existe au moins un réel $c \in [0; 1]$ tel que $f(c) = c$. (2 points)
2. Soit f la fonction cosinus (les angles sont exprimés en radians). Montrer que, pour tout $x \in [0; 1]$, $\cos x \in [0; 1]$. (1,5 points)
3. Montrer que l'équation $\cos x = x$ admet une unique solution c dans $[0; 1]$. (1,5 points)
4. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de c d'amplitude 0,1 en justifiant. (1 point)