

Contrôle : chapitre 3, Continuité et TVI

Durée : 60 minutes. **Calculatrice** : autorisée. **Barème** : 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (6 points) : Continuité en un point

Dans cet exercice, a désigne un nombre réel. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax + 5 \text{ si } x < 2 \text{ et } f(x) = x^2 - 3 \text{ si } x \geq 2.$$

1. Déterminer la valeur de a pour laquelle f est continue en 2. Pour cette valeur de a , la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? (2 points)

2. Soit b un réel et h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$ si $x \neq 3$ et $h(3) = b$.

Déterminer la valeur de b pour laquelle h est continue en 3. (1,5 points)

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$. On admet que (u_n) converge vers un réel ℓ . Justifier que $\ell = \sqrt{2\ell + 3}$, puis déterminer la valeur de ℓ . (2,5 points)

Correction de l'exercice 1, question 1

Question 1 (2 points)

On calcule les trois nombres en 2.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2a + 5 \text{ (fonction affine), } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2^2 - 3 = 1 \text{ et } f(2) = 2^2 - 3 = 1.$$

La fonction f est continue en 2 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$, c'est-à-dire $2a + 5 = 1$, soit $a = -2$.

Pour $a = -2$: sur $] -\infty ; 2[$, f est une fonction affine, donc continue ; sur $]2 ; +\infty[$, f est une fonction polynôme, donc continue ; f est continue en 2 d'après ce qui précède.

$a = -2$, et f est alors continue sur $\mathbb{R}$.

Barème : 0,5 point pour la limite à gauche, la limite à droite et $f(2)$; 0,5 point pour la condition $2a + 5 = 1$ et la valeur $a = -2$; 1 point pour la continuité sur $\mathbb{R}$ justifiée (continuité sur chaque intervalle ouvert et en 2).

Correction de l'exercice 1, question 2

Question 2 (1,5 points)

Pour tout $x \neq 3$: $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$, donc $h(x) = x + 2$.

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = 3 + 2 = 5$. La fonction h est continue en 3 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = h(3)$, c'est-à-dire $b = 5$.

h est continue en 3 si et seulement si $b = 5$.

Barème : 0,5 point pour la factorisation (ou la simplification) $h(x) = x + 2$; 0,5 point pour la limite finie 5 ; 0,5 point pour la condition de continuité $\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = h(3)$ et la valeur $b = 5$.

Correction de l'exercice 1, question 3

Question 3 (2,5 points)

Tous les termes de la suite sont positifs ou nuls ($u_0 = 0$ et une racine carrée est positive ou nulle). Par passage à la limite dans les inégalités, $\ell \geq 0$.

La fonction $g : t \mapsto \sqrt{2t + 3}$ est continue sur $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right[$ (composée d'une fonction affine et de la racine carrée), donc continue en $\ell \geq 0$.

Comme (u_n) converge vers ℓ et que g est continue en ℓ , $g(u_n)$ converge vers $g(\ell)$, c'est-à-dire $u_{n+1} \rightarrow \sqrt{2\ell + 3}$. Mais (u_{n+1}) converge aussi vers ℓ . Par unicité de la limite : $\ell = \sqrt{2\ell + 3}$.

On en déduit $\ell^2 = 2\ell + 3$, soit $\ell^2 - 2\ell - 3 = 0$, c'est-à-dire $(\ell - 3)(\ell + 1) = 0$. Donc $\ell = 3$ ou $\ell = -1$.

Comme $\ell \geq 0$, $\ell = 3$.

Barème : 1 point pour la continuité de la fonction g en ℓ invoquée, puis l'égalité $\ell = g(\ell)$ justifiée ; 0,5 point pour $\ell \geq 0$ justifié ; 0,5 point pour l'équation $\ell^2 = 2\ell + 3$ et ses solutions 3 et -1 ; 0,5 point pour l'élimination de -1 et la conclusion $\ell = 3$.

Exercice 2 (8 points) : Deux solutions pour une équation

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - 2x - 2$. On admet que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

1. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations complet (limites et valeur du minimum). (2 points)
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions, notées α et β avec $\alpha < \beta$. Montrer que $-1 < \alpha < 0$ et $1 < \beta < 2$. (3 points)
3. On considère le script Python ci-dessous. Déterminer le couple renvoyé par l'appel `dichotomie(f, 1, 2, 0.1)` en détaillant les étapes (valeurs de m et signe de $f(m)$, arrondi à 10^{-2}), puis interpréter ce résultat pour β . (2 points)
4. Combien d'itérations de la boucle `while` faut-il, au minimum, pour obtenir avec `dichotomie(f, 1, 2, 0.001)` un encadrement de β d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-3} ? (1 point)

Correction de l'exercice 2, question 1

Question 1 (2 points)

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x , $f'(x) = e^x - 2$.

$f'(x) > 0 \iff e^x > 2 \iff x > \ln 2$. Donc f est strictement décroissante sur $] -\infty ; \ln 2]$ et strictement croissante sur $[\ln 2 ; +\infty[$.

$$f(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2 \ln 2 - 2 = 2 - 2 \ln 2 - 2 = -2 \ln 2.$$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$-2 \ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

Le minimum de f vaut $-2 \ln 2 \approx -1,39$, atteint en $x = \ln 2$.

Barème : 0,5 point pour la dérivée ; 0,5 point pour le signe de f' et les variations ; 0,5 point pour la valeur $f(\ln 2) = -2 \ln 2$; 0,5 point pour le tableau complet avec les limites.

Correction de l'exercice 2, question 2

Question 2 (3 points)

Sur $] -\infty ; \ln 2]$. La fonction f est dérivable donc continue, et strictement décroissante. Elle prend ses valeurs dans $[-2 \ln 2 ; +\infty[$, et $0 \in] -2 \ln 2 ; +\infty[$ car $-2 \ln 2 < 0$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $] -\infty ; \ln 2]$ (et $\alpha \neq \ln 2$ car $f(\ln 2) \neq 0$).

Sur $[\ln 2; +\infty[$. De même, f est continue et strictement croissante, à valeurs dans $[-2\ln 2; +\infty[$, qui contient 0. L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β dans $[\ln 2; +\infty[$, avec $\beta > \ln 2$.

Les deux intervalles ne se recoupent qu'en $\ln 2$, qui n'est pas solution : l'équation $f(x) = 0$ admet donc **exactement deux solutions** $\alpha < \ln 2 < \beta$.

Encadrements. $f(-1) = e^{-1} + 2 - 2 = e^{-1} > 0$ et $f(0) = 1 - 2 = -1 < 0$. Comme f est continue et strictement décroissante sur $] -\infty; \ln 2]$ et que $f(0) < 0 < f(-1)$, on a $\alpha \in] -1; 0[$ (les réels -1 et 0 sont dans l'intervalle car $0 < \ln 2$).

$f(1) = e - 4 < 0$ (car $e < 4$) et $f(2) = e^2 - 6 > 0$ (car $e > 2,5$ donc $e^2 > 6,25$). Comme f est continue et strictement croissante sur $[\ln 2; +\infty[$ (et 1 et 2 y sont, car $\ln 2 < 1$), $f(1) < 0 < f(2)$ donne $\beta \in]1; 2[$.

$-1 < \alpha < 0$ et $1 < \beta < 2$.

Barème : 0,5 point pour continuité et stricte monotonie mentionnées ; 1 point pour l'existence et l'unicité de α sur $] -\infty; \ln 2]$ avec le nom du corollaire et la vérification que 0 est dans l'image ; 1 point pour l'existence et l'unicité de β sur $[\ln 2; +\infty[$; 0,5 point pour le nombre exact de solutions (deux, distinctes) et les encadrements justifiés par le signe de $f(-1), f(0), f(1), f(2)$.

Correction de l'exercice 2, question 3

Question 3 (2 points)

```
from math import exp

def f(x):
    return exp(x) - 2*x - 2

def dichotomie(f, a, b, e):
    while b - a > e:
        m = (a + b)/2
        if f(m)*f(a) <= 0:
            b = m
        else:
            a = m
    return a, b
```

Initialement $a = 1$ et $b = 2$, avec $f(1) < 0$.

Étape	a	b	m	$f(m)$ (arrondi)	Test $f(m) \times f(a) \leq 0$	Mise à jour
1	1	2	1,5	-0,52	faux	$a = 1,5$
2	1,5	2	1,75	0,25	vrai	$b = 1,75$
3	1,5	1,75	1,625	-0,17	faux	$a = 1,625$
4	1,625	1,75	1,6875	0,03	vrai	$b = 1,6875$

Après l'étape 4, $b - a = 1,6875 - 1,625 = 0,0625 \leq 0,1$: la boucle s'arrête.

L'appel renvoie $(1,625 ; 1,6875)$: $1,625 < \beta < 1,6875$, encadrement de β d'amplitude 0,0625.

Barème : 1 point pour les quatre étapes (valeurs de m et signes) correctement suivies ; 0,5 point pour le couple renvoyé $(1,625 ; 1,6875)$; 0,5 point pour l'interprétation comme encadrement de β .

Correction de l'exercice 2, question 4

Question 4 (1 point)

Après n itérations, l'amplitude de l'intervalle vaut $\frac{2-1}{2^n} = \frac{1}{2^n}$.

On cherche le plus petit entier n tel que $\frac{1}{2^n} \leq 10^{-3}$, c'est-à-dire $2^n \geq 1000$. Or $2^9 = 512 < 1000$ et $2^{10} = 1024 \geq 1000$.

Il faut **10 itérations**.

Barème : 0,5 point pour l'amplitude $\frac{1}{2^n}$; 0,5 point pour la valeur $n = 10$ justifiée.

Exercice 3 (6 points) : Points fixes

1. Soit f une fonction continue sur $[0 ; 1]$ telle que, pour tout $x \in [0 ; 1]$, $f(x) \in [0 ; 1]$. En considérant la fonction g définie sur $[0 ; 1]$ par $g(x) = f(x) - x$, démontrer qu'il existe au moins un réel $c \in [0 ; 1]$ tel que $f(c) = c$. (2 points)
2. Soit f la fonction cosinus (les angles sont exprimés en radians). Montrer que, pour tout $x \in [0 ; 1]$, $\cos x \in [0 ; 1]$. (1,5 points)
3. Montrer que l'équation $\cos x = x$ admet une unique solution c dans $[0 ; 1]$. (1,5 points)
4. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de c d'amplitude 0,1 en justifiant. (1 point)

Correction de l'exercice 3, question 1

Question 1 (2 points)

La fonction g est continue sur $[0; 1]$ comme différence de deux fonctions continues sur $[0; 1]$.

On a $g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0$ car $f(0) \in [0; 1]$, et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ car $f(1) \leq 1$.

Ainsi 0 est compris entre $g(1)$ et $g(0)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution c dans $[0; 1]$.

Pour ce réel c : $f(c) - c = 0$, soit $f(c) = c$.

Barème : 0,5 point pour la continuité de g justifiée ; 0,5 point pour les signes $g(0) \geq 0$ et $g(1) \leq 0$; 1 point pour l'application du théorème des valeurs intermédiaires et la conclusion $f(c) = c$.

Correction de l'exercice 3, question 2

Question 2 (1,5 points)

La fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0; \pi]$, donc sur $[0; 1]$ car $1 < \frac{\pi}{2} < \pi$.

Pour tout $x \in [0; 1]$: $\cos 1 \leq \cos x \leq \cos 0 = 1$.

De plus $1 \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, intervalle sur lequel le cosinus est positif, donc $\cos 1 > 0$.

Pour tout $x \in [0; 1]$, $0 < \cos 1 \leq \cos x \leq 1$, donc $\cos x \in [0; 1]$.

Barème : 1 point pour la décroissance du cosinus sur $[0; 1]$ et l'encadrement $\cos 1 \leq \cos x \leq 1$; 0,5 point pour $\cos 1 > 0$ justifié.

Correction de l'exercice 3, question 3

Question 3 (1,5 points)

Soit $g(x) = \cos x - x$ sur $[0; 1]$. La fonction g est dérivable donc continue, et $g'(x) = -\sin x - 1$.

Pour tout $x \in [0; 1]$, $\sin x \geq 0$ (car $[0; 1] \subset [0; \pi]$), donc $g'(x) \leq -1 < 0$: g est strictement décroissante sur $[0; 1]$.

De plus $g(0) = 1 > 0$ et $g(1) = \cos 1 - 1 < 0$ (car $\cos 1 < 1$, puisque $\cos$ est strictement décroissante sur $[0; 1]$).

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$, c'est-à-dire $\cos x = x$, admet une unique solution c dans $[0; 1]$.

Barème : 0,5 point pour la dérivée et la stricte décroissance de g ; 0,5 point pour $g(0) > 0 > g(1)$; 0,5 point pour la conclusion avec le corollaire du TVI.

Correction de l'exercice 3, question 4

Question 4 (1 point)

$$g(0,7) = \cos 0,7 - 0,7 \approx 0,06 > 0 \text{ et } g(0,8) = \cos 0,8 - 0,8 \approx -0,10 < 0.$$

Comme g est continue et strictement décroissante sur $[0; 1]$, $g(0,8) < 0 < g(0,7)$ donne $0,7 < c < 0,8$.

Barème : 0,5 point pour les valeurs $g(0,7)$ et $g(0,8)$ avec leurs signes ; 0,5 point pour la conclusion $0,7 < c < 0,8$ justifiée par la monotonie.

Récapitulatif du barème

Exercice	Points
Exercice 1	6
Exercice 2	8
Exercice 3	6
Total	20