

# Continuité et TVI : le cours

Une fonction continue, c'est une fonction dont la courbe se trace **sans lever le crayon**.

Cette image simple cache un théorème puissant : le **théorème des valeurs intermédiaires**.

Il garantit qu'une équation a une solution sans avoir besoin de la calculer.

C'est l'outil de base de tous les exercices « montrer que l'équation  $f(x) = k$  admet une unique solution ».

Dans tout le cours, tu verras des astuces, des pièges et un peu d'humour.

## Comment utiliser ce cours

- Lis une partie, puis fais tout de suite la fiche correspondante.
- Les parties 5, 6 et 7 sont les plus rentables au bac : apprends la méthode « unique solution » comme une formule.
- Le Guide de rédaction (dernière leçon du chapitre) te donne les phrases exactes à écrire.

## 1. Continuité en un point

Soit  $f$  définie sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$ . On dit que  $f$  est **continue en  $a$**  si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Cela revient à dire que :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

La limite à gauche, la limite à droite et la valeur en  $a$  coïncident.

## Pièges

- Il faut que  $f$  soit **définie** en  $a$ . Sans  $f(a)$ , on ne parle pas de continuité en  $a$ .
- Une limite qui existe ne suffit pas : elle doit être **égale à  $f(a)$** . (Exemple :  $f(x) = x^2$  si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 1$  n'est pas continue en 0.)
- Trois nombres à comparer : la limite à gauche, la limite à droite, et la valeur.

## 2. Continuité sur un intervalle et fonctions usuelles

Une fonction est **continue sur un intervalle  $I$**  si elle est continue en tout point de  $I$ . Sont continues sur leur ensemble de définition :

- les polynômes ;
- les fractions rationnelles ;
- la racine carrée (sur  $[0; +\infty[$ ) ;
- la valeur absolue ;
- l'exponentielle ;

- le cosinus et le sinus.

**Opérations :** la somme, le produit et la composée de fonctions continues sont continues. Le quotient de deux fonctions continues est continu là où le dénominateur ne s'annule pas.

**Dérivabilité :** toute fonction **dérivable** sur  $I$  est **continue** sur  $I$ . **La réciproque est fausse :** la fonction valeur absolue est continue en  $0$  mais n'est pas dérivable en  $0$ .

**Astuce de rédaction :** « La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  comme somme, produit et composée de fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  », ou plus court : «  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , donc continue sur  $\mathbb{R}$  ». C'est la phrase qui ouvre presque tous les exercices de ce chapitre.

**Piège :** la partie entière  $E(x)$  n'est pas continue en un entier. À gauche de  $2$ ,  $E(x) = 1$  ; en  $2$  et à droite,  $E(x) = 2$ .

### 3. Fonctions définies par morceaux et prolongement par continuité

**Fonction par morceaux.** Pour étudier la continuité en un point de raccordement  $a$ , on calcule les trois nombres :

- $\lim_{x \rightarrow a^-} f$  ;
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f$  ;
- $f(a)$ .

La fonction est continue en  $a$  si et seulement s'ils sont égaux. Un paramètre s'obtient en écrivant cette égalité.

**Exemple.**  $f(x) = ax + 1$  si  $x < 2$  et  $f(x) = x^2 - 1$  si  $x \geq 2$ . En  $2$  :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f = 2a + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f = 3$$

$$f(2) = 3$$

Pour que  $f$  soit continue en  $2$ , il faut et il suffit que  $2a + 1 = 3$ , c'est-à-dire  $a = 1$ .

**Prolongement par continuité.** Si  $f$  n'est pas définie en  $a$  mais que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  (un réel), on peut prolonger  $f$  par continuité en posant  $f(a) = \ell$ .

Par exemple,  $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$  n'est pas définie en  $3$ . Mais pour  $x \neq 3$ ,  $f(x) = x + 3$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 3} f = 6$ . On prolonge en posant  $f(3) = 6$ .

### 4. Continuité, limites et suites

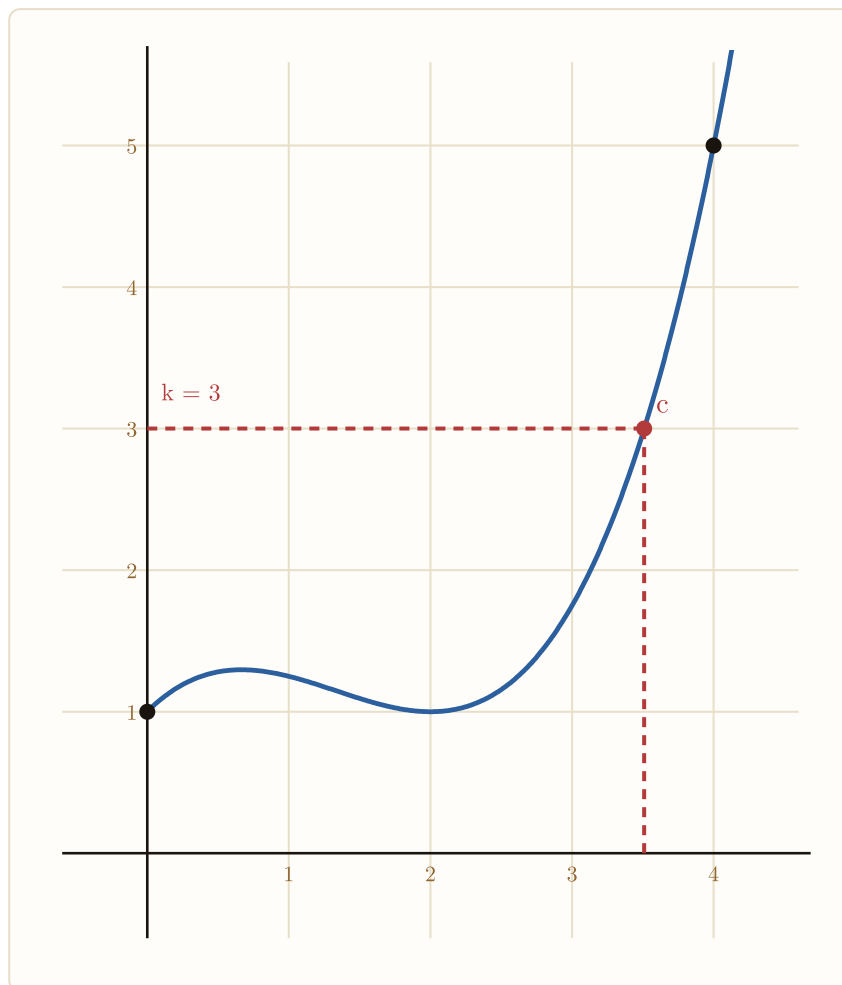
Si  $f$  est continue en  $a$  et si  $u_n \rightarrow a$ , alors  $f(u_n) \rightarrow f(a)$ . En particulier, pour une suite définie par  $u_{n+1} = f(u_n)$  :

- si  $u_n \rightarrow \ell$  et si  $f$  est continue en  $\ell$ , alors  $u_{n+1} \rightarrow f(\ell)$  ;
- comme  $(u_{n+1})$  tend aussi vers  $\ell$ , on obtient  $\ell = f(\ell)$ .

C'est exactement la justification de la méthode « la limite  $\ell$  vérifie  $\ell = f(\ell)$  » du chapitre Suites.

**Piège :** cette égalité exige la **continuité de  $f$**  en  $\ell$  et la **convergence** de  $(u_n)$ . Sans l'une ou l'autre, elle n'est pas justifiée.

## 5. Le théorème des valeurs intermédiaires (TVI)



TVI :  $f$  est continue,  $f(0) < 3 < f(4)$ , donc  $f(x) = 3$  admet une solution  $c$  dans  $[0 ; 4]$

**Théorème.** Soit  $f$  une fonction **continue sur un intervalle**  $[a ; b]$ . Pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , l'équation  $f(x) = k$  admet **au moins une solution**  $c$  dans  $[a ; b]$ .

**Cas particulier le plus utilisé :** si  $f$  est continue sur  $[a ; b]$  et si  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signes contraires ( $f(a) \times f(b) < 0$ ), alors l'équation  $f(x) = 0$  admet au moins une solution dans  $]a ; b[$ .

**Version avec des limites.** Le théorème s'étend aux intervalles ouverts, y compris infinis : on remplace  $f(a)$  et  $f(b)$  par les **limites** de  $f$  aux bornes.

**Pièges**

- Le TVI donne l'**existence**, jamais l'**unicité**. Pour l'unicité, il faut la stricte monotonie (partie 6).
- La continuité est indispensable :  $f(x) = \frac{1}{x}$  sur  $[-1; 1]$  change de signe sans jamais s'annuler.
- Le nombre  $k$  doit être **entre**  $f(a)$  et  $f(b)$  : sinon, aucune conclusion.

Le TVI, c'est la promesse qu'une courbe continue ne peut pas se téléporter : pour aller de  $f(a)$  à  $f(b)$ , elle passe par toutes les valeurs intermédiaires.

**6. Le corollaire du TVI : existence et unicité**

**Corollaire.** Soit  $f$  une fonction **continue et strictement monotone** sur  $[a; b]$ . Pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , l'équation  $f(x) = k$  admet **une unique solution** dans  $[a; b]$ .

**Version avec limites.** Si  $f$  est continue et strictement monotone sur un intervalle ouvert  $]a; b[$  (bornes éventuellement infinies), alors, pour tout réel  $k$  strictement compris entre les limites de  $f$  en  $a$  et en  $b$ , l'équation  $f(x) = k$  admet une unique solution dans  $]a; b[$ .

**7. La méthode « existence et unicité d'une solution »**

1. **Continuité** : justifie que  $f$  est continue sur l'intervalle (le plus souvent : «  $f$  est dérivable, donc continue »).
2. **Stricte monotonie** : étudie le signe de  $f'$  et conclut «  $f$  est strictement croissante (ou décroissante) sur l'intervalle ».
3. **Valeurs aux bornes** : calcule  $f(a)$  et  $f(b)$  (ou les limites), et vérifie que  $k$  est compris entre elles (souvent  $f(a) \times f(b) < 0$  pour  $k = 0$ ).
4. **Conclusion** : « D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $f(x) = k$  admet une unique solution dans l'intervalle ».

**Astuce** : le tableau de variations complet (avec limites ou valeurs aux bornes) est la meilleure pièce justificative. Il montre en même temps la monotonie et les valeurs aux bornes.

**Exemple.** Montrons que  $x^3 + x - 1 = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $[0; 1]$ .

Soit  $f(x) = x^3 + x - 1$ .  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , donc continue.  $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ , donc  $f$  est strictement croissante sur  $[0; 1]$ .

Comme  $f(0) = -1 < 0 < 1 = f(1)$ , d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $[0; 1]$ .

**Plusieurs solutions.** Si  $f$  n'est pas monotone sur tout l'intervalle, on découpe l'intervalle en morceaux où  $f$  est strictement monotone.

On applique le corollaire sur chacun.

Le nombre de solutions est la somme des nombres de solutions trouvées.

## 8. Encadrer une solution : balayage, dichotomie et Python

**Balayage.** On calcule  $f$  en des points régulièrement espacés (pas 0,1, puis 0,01) jusqu'à trouver un changement de signe. Comme  $f$  est strictement monotone, la solution est dans l'intervalle où le signe change.

**Dichotomie.** On coupe l'intervalle en deux, on garde la moitié où le signe change, et on recommence. La largeur de l'intervalle est divisée par 2 à chaque étape : après  $n$  étapes, elle vaut  $\frac{b-a}{2^n}$ .

**Le script de dichotomie à connaître** ( $f$  strictement monotone,  $f(a)f(b) < 0$ ) :

```
def dichotomie(f, a, b, e):
    while b - a > e:
        m = (a + b)/2
        if f(m)*f(a) <= 0:
            b = m
        else:
            a = m
    return a, b
```

Le produit  $f(m)*f(a) \leq 0$  signifie que  $f$  change de signe (ou s'annule) entre  $a$  et  $m$  : la solution est dans  $[a; m]$ . Sinon, elle est dans  $[m; b]$ .

**Pièges :** la dichotomie suppose  $f$  continue et de signe contraire aux extrémités. Et « largeur  $\leq e$  » veut dire  $b - a \leq e$  : compte le nombre d'itérations avec  $\frac{b-a}{2^n} \leq e$ .

## 9. Les 10 pépites du chapitre

1. **Tableau de variations d'abord**, avec limites ou valeurs aux bornes : il justifie la monotonie et les bornes d'un seul coup.
2. **Plusieurs solutions ?** Applique le corollaire sur chaque intervalle de stricte monotonie.
3. **Signes contraires** : écris  $f(a) \times f(b) < 0$  ou, mieux,  $f(a) < 0 < f(b)$ .
4. **Équation  $f(x) = g(x)$**  : pose  $h = f - g$  et cherche  $h(x) = 0$ .
5. **Point fixe  $f(c) = c$**  : pose  $g(x) = f(x) - x$  et applique le TVI à  $g$ .
6. **Existence  $\neq$  unicité** : sans stricte monotonie, tu n'as que l'existence.
7. **Précise toujours l'intervalle** et vérifie que  $a$  et  $b$  lui appartiennent.
8. **Donne des valeurs approchées cohérentes** :  $f(0,68) \approx -0,0056$  et  $f(0,69) \approx 0,0185$  justifient  $\alpha \in ]0,68; 0,69[$ .
9. **Calculatrice ou Python** : mode « table » pour le balayage, dichotomie pour la précision.
10. **Conclus par la phrase-type** : « D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires... ».

## Complément du programme : la méthode de Newton

La dichotomie divise l'intervalle par deux à chaque étape. La **méthode de Newton** va beaucoup plus vite : on remplace la courbe par sa tangente.

**Principe.** Si  $f$  est dérivable et si  $f'(x_n) \neq 0$ , la tangente en  $x_n$  coupe l'axe des abscisses en

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

*Exemple.*  $f(x) = x^3 + x - 1$  s'annule une seule fois sur  $[0; 1]$  (elle est continue et strictement croissante, avec  $f(0) = -1 < 0 < 1 = f(1)$ ). On a  $f'(x) = 3x^2 + 1$  et on part de  $x_0 = 1$ .

```
x = 1
for k in range(4):
    x = x - (x**3 + x - 1) / (3 * x**2 + 1)
    print(k + 1, x)
```

On lit 0,75 ; 0,686047 ; 0,682340 ; 0,682328 : **quatre étapes suffisent** pour 5 décimales correctes, alors que la dichotomie en demande environ dix-sept.

*Variante : la méthode de la sécante.* On remplace la tangente par la droite qui passe par  $(a; f(a))$  et  $(b; f(b))$  : elle coupe l'axe des abscisses en  $x = a - f(a) \frac{b - a}{f(b) - f(a)}$ . Elle évite le calcul de  $f'$ .

**Pièges :**

- Si  $f'(x_n) = 0$ , la formule n'a plus de sens : la tangente est horizontale.
- Un mauvais point de départ peut faire diverger la méthode : choisis  $x_0$  proche de la solution.

**10. Ce qui peut tomber au bac**

- Une **équation**  $f(x) = k$  dont il faut montrer qu'elle a une unique solution, puis qu'on encadre à  $10^{-2}$  (fiches 2 et 3).
- Des **fonctions définies par morceaux** avec un paramètre (fiche 1).
- Un lien **suites et continuité** : limite d'une suite définie par  $u_{n+1} = f(u_n)$ , ou suite définie comme solution d'une équation.
- Un **algorithme de dichotomie** à compléter ou à interpréter (fiche 3).

Tu as maintenant le cours. Passe aux trois fiches, aux exercices type bac, puis au Guide de rédaction du chapitre.