

Continuité et TVI : exercices type bac

Trois exercices complets, dans le style de l'épreuve du bac : une fonction avec exactement deux solutions, une suite reliée à une équation à solution unique, une fonction produit avec exponentielle et l'équation $h(x) = \frac{1}{2}$.

Les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une excellente copie de bac : continuité et stricte monotonie justifiées, valeurs et limites aux bornes, théorème nommé, conclusion à chaque question. **Durée conseillée : 30 minutes par exercice, sur papier, sans regarder la correction.**

Comment t'entraîner efficacement

- Chronomètre-toi et rédige tout, comme le jour du bac.
- Pour chaque « montrer que l'équation a une unique solution », écris les quatre étapes du corollaire dans l'ordre.
- Si tu bloques sur une question, écris « on admet que... » et passe à la suivante.
- À la fin de chaque exercice, ouvre « Points clés attendus » : c'est la liste de ce que le correcteur cherche.

Exercice 1 : une fonction et exactement deux solutions

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x - 2$.

1. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g .
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions, notées α et β , avec $\alpha < \beta$.
4. Montrer que $\alpha \in]-1,9; -1,8[$ et $\beta \in]1,1; 1,2[$.
5. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Exercice 2 : une suite reliée à l'équation $x^3 + x - 1 = 0$

Partie A. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x - 1$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; 1]$. Encadrer α à 10^{-2} près.

Partie B. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{1 + u_n^2}$.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

3. La suite (u_n) est-elle monotone ? (On calculera u_1 , u_2 et u_3 .)

4. On admet que (u_n) converge vers un réel ℓ . Montrer que $\ell = \alpha$.

5. Écrire un script qui affiche u_1 à u_8 , et interpréter les valeurs obtenues.

Exercice 3 : un produit avec exponentielle et l'équation $h(x) = \frac{1}{2}$

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x + 1)e^{-x}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}$?

2. Calculer $h'(x)$ et dresser le tableau de variations de h .

3. Montrer que l'équation $h(x) = \frac{1}{2}$ admet exactement deux solutions, notées α et β , avec $\alpha < \beta$.

4. Montrer que $\alpha \in]-1; -0,5[$ et $\beta \in]1; 2[$.

5. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $h(x) \geq \frac{1}{2}$.

Les réflexes à retenir

- Pour une équation $f(x) = k$: **continuité, stricte monotonie, valeurs aux bornes, conclusion**, dans cet ordre.
- Quand f change de monotonie, applique le corollaire **sur chaque intervalle** et additionne les solutions.
- N'oublie pas de vérifier que k est **strictement** compris entre les limites quand un intervalle est ouvert.
- Pour un encadrement, donne les deux valeurs de f avec leur signe, et rappelle le sens de variation.
- Dans un exercice qui mélange suite et équation, c'est l'**unicité** de la solution qui permet d'identifier la limite.

Aller plus loin avec les vrais sujets

Quand tu es à l'aise avec ce chapitre, entraîne-toi sur les études de fonctions des sujets officiels des années précédentes.

Ils sont disponibles sur le site de l'[APMEP](https://apmep.fr/).

Chronomètre-toi et rédige comme le jour du bac.