

Continuité et TVI : exercices type bac

Trois exercices complets, dans le style de l'épreuve du bac : une fonction avec exactement deux solutions, une suite reliée à une équation à solution unique, une fonction produit avec exponentielle et l'équation $h(x) = \frac{1}{2}$.

Les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une excellente copie de bac : continuité et stricte monotonie justifiées, valeurs et limites aux bornes, théorème nommé, conclusion à chaque question. **Durée conseillée : 30 minutes par exercice, sur papier, sans regarder la correction.**

Comment t'entraîner efficacement

- Chronomètre-toi et rédige tout, comme le jour du bac.
- Pour chaque « montrer que l'équation a une unique solution », écris les quatre étapes du corollaire dans l'ordre.
- Si tu bloques sur une question, écris « on admet que... » et passe à la suivante.
- À la fin de chaque exercice, ouvre « Points clés attendus » : c'est la liste de ce que le correcteur cherche.

Exercice 1 : une fonction et exactement deux solutions

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x - 2$.

1. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g .
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions, notées α et β , avec $\alpha < \beta$.
4. Montrer que $\alpha \in]-1,9; -1,8[$ et $\beta \in]1,1; 1,2[$.
5. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Correction de la question 1

En $-\infty$. Quand $x \rightarrow -\infty$, $e^x \rightarrow 0$ et $-x - 2 \rightarrow +\infty$. Par somme :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

En $+\infty$. Pour tout x , $g(x) = e^x(1 - xe^{-x} - 2e^{-x})$. Par croissances comparées, $xe^{-x} \rightarrow 0$, et $e^{-x} \rightarrow 0$. Par somme, le facteur entre parenthèses tend vers 1. Comme $e^x \rightarrow +\infty$, par produit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

Correction de la question 2

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = e^x - 1$$

La fonction exponentielle est strictement croissante et $e^0 = 1$. Donc $g'(x) > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$, $g'(0) = 0$ et $g'(x) < 0$ pour $x < 0$.

Tableau de variations. g est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$, de la limite $+\infty$ à $g(0) = e^0 - 0 - 2 = -1$. Puis g est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, de -1 à la limite $+\infty$.

Correction de la question 3

Sur $] -\infty ; 0]$. La fonction g est continue (dérivable) et strictement décroissante, de $+\infty$ à $g(0) = -1$.

Le nombre 0 est compris entre -1 et $+\infty$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $] -\infty ; 0]$.

Comme $g(0) = -1 \neq 0$, $\alpha < 0$.

Sur $[0 ; +\infty[$. La fonction g est continue et strictement croissante, de -1 à $+\infty$.

Le nombre 0 est compris entre ces valeurs.

D'après le corollaire, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution β dans $[0 ; +\infty[$, et $\beta > 0$ car $g(0) \neq 0$.

Conclusion. Les deux intervalles couvrent $\mathbb{R}$, et $\alpha < 0 < \beta$.

L'équation $g(x) = 0$ admet donc exactement deux solutions α et β .

Correction de la question 4

Pour α .

$$g(-1,9) = e^{-1,9} + 1,9 - 2 \approx 0,0496 > 0$$

$$g(-1,8) = e^{-1,8} + 1,8 - 2 \approx -0,0347 < 0$$

Comme g est continue et strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$:

$$\alpha \in]-1,9; -1,8[$$

Pour β .

$$g(1,1) = e^{1,1} - 1,1 - 2 \approx -0,0958 < 0$$

$$g(1,2) = e^{1,2} - 1,2 - 2 \approx 0,1201 > 0$$

Comme g est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$:

$$\beta \in]1,1; 1,2[$$

Correction de la question 5

D'après le tableau de variations et les valeurs de α et β :

- sur $] -\infty; \alpha[$, g est strictement décroissante et $g(\alpha) = 0$, donc $g(x) > 0$;
- sur $] \alpha; \beta[$, $g(x) < 0$ (g reste entre 0 et son minimum -1) ;
- sur $] \beta; +\infty[$, g est strictement croissante et $g(\beta) = 0$, donc $g(x) > 0$.

Donc $g(x) > 0$ pour $x < \alpha$ ou $x > \beta$, $g(x) < 0$ pour $\alpha < x < \beta$, et $g(x) = 0$ pour $x = \alpha$ ou $x = \beta$.

Points clés attendus pour l'exercice 1

- **Q1** : les deux limites sont justifiées (somme ; croissances comparées puis produit).
- **Q2** : dérivabilité, signe de g' justifié par $e^0 = 1$ et la croissance de l'exponentielle, valeur du minimum $g(0) = -1$ dans le tableau.
- **Q3** : le corollaire est appliqué sur chaque intervalle, avec continuité, stricte monotonie, k compris entre les valeurs, et le nombre total de solutions est conclu.
- **Q4** : les valeurs numériques de g aux bornes sont données avec leur signe, avec le sens de variation rappelé.

Exercice 2 : une suite reliée à l'équation $x^3 + x - 1 = 0$

Partie A. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x - 1$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; 1]$. Encadrer α à 10^{-2} près.

Partie B. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{1 + u_n^2}$.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

3. La suite (u_n) est-elle monotone ? (On calculera u_1 , u_2 et u_3 .)

4. On admet que (u_n) converge vers un réel ℓ . Montrer que $\ell = \alpha$.

5. Écrire un script qui affiche u_1 à u_8 , et interpréter les valeurs obtenues.

Correction de la question 1

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme), donc continue. Pour tout x , $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$: f est strictement croissante sur $[0; 1]$. De plus $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; 1]$.

On a $f(0,68) \approx -0,0056 < 0$ et $f(0,69) \approx 0,0185 > 0$. Comme f est strictement croissante :
 $0,68 < \alpha < 0,69$

Correction de la question 2

Soit $P(n)$ la propriété : « $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ ».

Initialisation. $u_0 = 1$, donc $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq 1$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $\frac{1}{2} \leq u_k \leq 1$ (hypothèse de récurrence).

Les nombres étant positifs, en élevant au carré (la fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$) :
 $\frac{1}{4} \leq u_k^2 \leq 1$.

En ajoutant 1 : $\frac{5}{4} \leq 1 + u_k^2 \leq 2$.

La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$: elle retourne les inégalités, donc
 $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1 + u_k^2} \leq \frac{4}{5}$.

Ainsi $\frac{1}{2} \leq u_{k+1} \leq \frac{4}{5} \leq 1$: $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire.

Donc $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction de la question 3

$$u_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$u_2 = \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$u_3 = \frac{1}{1+0,64} \approx 0,6098$$

On a $u_1 < u_0$, puis $u_1 < u_2$, puis $u_3 < u_2$: la suite descend, monte, puis descend.

La suite (u_n) n'est pas monotone.

C'est normal : la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est décroissante sur $[0; +\infty[$.

Correction de la question 4

La suite (u_n) converge vers ℓ , et, d'après la question 2, $\frac{1}{2} \leq \ell \leq 1$ (passage à la limite dans l'encadrement).

La fonction $\varphi : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur $1+x^2$ ne s'annule pas. En passant à la limite dans $u_{n+1} = \varphi(u_n)$, on obtient $\ell = \frac{1}{1+\ell^2}$.

Comme $1+\ell^2 > 0$, cela équivaut à $\ell(1+\ell^2) = 1$, c'est-à-dire $\ell^3 + \ell - 1 = 0$, soit $f(\ell) = 0$.

De plus $\ell \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \subset [0; 1]$.

D'après la question 1, α est l'**unique** solution de $f(x) = 0$ dans $[0; 1]$.

Donc $\ell = \alpha$.

Correction de la question 5

Le script

```

u = 1
for n in range(1, 9):
    u = 1/(1 + u**2)
    print(n, u)

```

Les valeurs. Valeurs approchées : $u_1 = 0,5$; $u_2 = 0,8$; $u_3 \approx 0,6098$; $u_4 \approx 0,7290$; $u_5 \approx 0,6530$; $u_6 \approx 0,7011$; $u_7 \approx 0,6705$; $u_8 \approx 0,6899$.

Interprétation. Les termes alternent au-dessus et en dessous de $\alpha \approx 0,682$ en s'en rapprochant. C'est cohérent avec le fait que la suite converge vers α , sans être monotone.

Points clés attendus pour l'exercice 2

- **Q1** : les quatre étapes du corollaire, et l'encadrement justifié par deux valeurs de f .
- **Q2** : hypothèse de récurrence utilisée, décroissance de la fonction inverse citée (les inégalités se retournent).
- **Q3** : trois termes calculés et la conclusion « non monotone », avec la raison.
- **Q4** : continuité de φ justifiée, ℓ dans $[0; 1]$, équivalence avec $f(\ell) = 0$, et **unicité** de la solution invoquée pour conclure $\ell = \alpha$.

Exercice 3 : un produit avec exponentielle et l'équation $h(x) = \frac{1}{2}$

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x+1)e^{-x}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}$?
2. Calculer $h'(x)$ et dresser le tableau de variations de h .
3. Montrer que l'équation $h(x) = \frac{1}{2}$ admet exactement deux solutions, notées α et β , avec $\alpha < \beta$.
4. Montrer que $\alpha \in]-1; -0,5[$ et $\beta \in]1; 2[$.
5. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $h(x) \geq \frac{1}{2}$.

Correction de la question 1

En $-\infty$. Quand $x \rightarrow -\infty$, $x+1 \rightarrow -\infty$ et $e^{-x} \rightarrow +\infty$ (car $-x \rightarrow +\infty$). Par produit :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$$

En $+\infty$. Pour tout x , $h(x) = xe^{-x} + e^{-x}$. Par croissances comparées, $xe^{-x} \rightarrow 0$, et $e^{-x} \rightarrow 0$.
Par somme :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$$

Conséquence. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$, la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

Correction de la question 2

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de $x \mapsto x + 1$ et de $x \mapsto e^{-x}$, dérivables sur $\mathbb{R}$. On applique $(uv)' = u'v + uv'$ avec $u(x) = x + 1$, $v(x) = e^{-x}$, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -e^{-x}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h'(x) = e^{-x} - (x + 1)e^{-x} = e^{-x}(1 - x - 1)$$

$$h'(x) = -xe^{-x}$$

Comme $e^{-x} > 0$, $h'(x)$ est du signe de $-x$: $h'(x) > 0$ si $x < 0$, $h'(0) = 0$ et $h'(x) < 0$ si $x > 0$.

Tableau de variations. h est strictement croissante sur $] -\infty ; 0]$, de la limite $-\infty$ à $h(0) = 1$. Puis h est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$, de 1 à la limite 0.

Correction de la question 3

Sur $] -\infty ; 0]$. La fonction h est continue et strictement croissante, de $-\infty$ à $h(0) = 1$.

Le nombre $\frac{1}{2}$ est compris entre $-\infty$ et 1.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution α dans $] -\infty ; 0]$.

Comme $h(0) = 1 \neq \frac{1}{2}$, $\alpha < 0$.

Sur $[0 ; +\infty[$. La fonction h est continue et strictement décroissante, de 1 à la limite 0.

Le nombre $\frac{1}{2}$ est strictement compris entre 0 et 1.

D'après le corollaire, l'équation $h(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution β dans $[0 ; +\infty[$, et $\beta > 0$.

Conclusion. Les deux intervalles couvrent $\mathbb{R}$ et $\alpha < 0 < \beta$.

L'équation $h(x) = \frac{1}{2}$ admet donc exactement deux solutions α et β .

Correction de la question 4

Pour α .

$$h(-1) = 0 \times e^1 = 0 < \frac{1}{2}$$

$$h(-0,5) = 0,5 \times e^{0,5} \approx 0,824 > \frac{1}{2}$$

Comme h est continue et strictement croissante sur $] -\infty ; 0]$:

$$\alpha \in] -1 ; -0,5[$$

Pour β .

$$h(1) = 2e^{-1} \approx 0,736 > \frac{1}{2}$$

$$h(2) = 3e^{-2} \approx 0,406 < \frac{1}{2}$$

Comme h est continue et strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$:

$$\beta \in]1 ; 2[$$

Correction de la question 5

D'après le tableau de variations :

- sur $] -\infty ; \alpha[$, $h(x) < \frac{1}{2}$ (h est strictement croissante et $h(\alpha) = \frac{1}{2}$) ;
- sur $[\alpha ; 0]$, $h(x) \geq \frac{1}{2}$;
- sur $[0 ; \beta]$, $h(x) \geq \frac{1}{2}$ (h est décroissante de 1 à $\frac{1}{2}$) ;
- sur $] \beta ; +\infty[$, $h(x) < \frac{1}{2}$.

L'ensemble des solutions de $h(x) \geq \frac{1}{2}$ est l'intervalle $[\alpha ; \beta]$.

Points clés attendus pour l'exercice 3

- **Q1** : croissances comparées citées, asymptote justifiée par la limite.
- **Q2** : dérivabilité justifiée, formule $(uv)'$ citée, factorisation par e^{-x} , signe justifié ($e^{-x} > 0$), tableau avec limites et valeur du maximum.

- **Q3** : le corollaire est appliqué **deux fois**, sur deux intervalles de stricte monotonie, avec $\frac{1}{2}$ compris entre les valeurs aux bornes.
- **Q4** : valeurs numériques de h avec leur signe par rapport à $\frac{1}{2}$.
- **Q5** : lecture correcte du tableau, conclusion sous forme d'intervalle.

Les réflexes à retenir

- Pour une équation $f(x) = k$: **continuité, stricte monotonie, valeurs aux bornes, conclusion**, dans cet ordre.
- Quand f change de monotonie, applique le corollaire **sur chaque intervalle** et additionne les solutions.
- N'oublie pas de vérifier que k est **strictement** compris entre les limites quand un intervalle est ouvert.
- Pour un encadrement, donne les deux valeurs de f avec leur signe, et rappelle le sens de variation.
- Dans un exercice qui mélange suite et équation, c'est l'**unicité** de la solution qui permet d'identifier la limite.

Aller plus loin avec les vrais sujets

Quand tu es à l'aise avec ce chapitre, entraîne-toi sur les études de fonctions des sujets officiels des années précédentes.

Ils sont disponibles sur le site de l'[APMEP](https://apmep.fr/).

Chronomètre-toi et rédige comme le jour du bac.