

Limites de fonctions : le cours

Une limite répond à une question simple : **que devient $f(x)$ quand x devient énorme, très négatif, ou très proche d'un réel a ?**

C'est l'outil qui permet de comprendre le comportement d'une courbe « aux extrémités » et de trouver ses asymptotes. Au bac, presque chaque étude de fonction commence par des limites : c'est du travail rapide, rentable, et les points sont là pour ceux qui maîtrisent les réflexes de ce chapitre.

Dans tout le cours, tu verras des astuces, des pièges et un peu d'humour.

Comment utiliser ce cours

- Lis une partie, puis fais tout de suite les exercices de la fiche indiquée à la fin.
- Les limites de référence (partie 2) sont à connaître par cœur : tout le reste s'appuie dessus.
- Si tu bloques sur un calcul, reprends l'ordre de bataille de la partie 6.

1. Notations et vocabulaire

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ se lit « quand x tend vers $+\infty$, $f(x)$ tend vers ℓ ». On écrit aussi $f(x) \rightarrow \ell$ quand $x \rightarrow +\infty$.

$x \rightarrow a^+$ signifie que x tend vers a par valeurs **supérieures** ($x > a$, on approche par la droite). $x \rightarrow a^-$ signifie par valeurs **inférieures** (on approche par la gauche).

La limite peut être un réel (limite finie), $+\infty$ ou $-\infty$ (limite infinie). Elle peut aussi ne pas exister.

Astuce : une fonction doit être définie « près » du point où on cherche la limite. Commence donc toujours par le **domaine de définition** : les limites se cherchent aux bornes de ce domaine.

2. Les limites de référence à connaître par cœur

En $+\infty$:

- $x \rightarrow +\infty$, $x^2 \rightarrow +\infty$, $x^3 \rightarrow +\infty$, $x^n \rightarrow +\infty$ (n entier ≥ 1), $\sqrt{x} \rightarrow +\infty$;
- $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$, $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$;
- $e^x \rightarrow +\infty$ et $e^{-x} \rightarrow 0$.

En $-\infty$:

- $x^2 \rightarrow +\infty$ et $x^3 \rightarrow -\infty$. Plus généralement, $x^n \rightarrow +\infty$ si n est **pair**, $x^n \rightarrow -\infty$ si n est **impair** ;
- $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ et $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$;
- $e^x \rightarrow 0$ et $e^{-x} \rightarrow +\infty$.

Piège : la parité de l'exposant compte en $-\infty$. $x^2 \rightarrow +\infty$ mais $x^3 \rightarrow -\infty$. Et $\sqrt{x}$ n'existe pas en $-\infty$ (x doit être positif).

En $-\infty$, un exposant impair a le don de tout rendre négatif. Ça se retient.

3. Limites en un réel a

Quand le dénominateur tend vers 0, la limite du quotient dépend du **signe** du dénominateur. Références :

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$. La limite en 0 n'existe pas (les deux côtés diffèrent) ;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$. Le carré est toujours positif, les deux côtés donnent $+\infty$;
- plus généralement, $\frac{1}{x-a} \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow a^+$ et $\rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow a^-$.

Méthode. Pour une fraction dont le dénominateur tend vers 0 :

1. Donne la limite du numérateur (un réel non nul).
2. Étudie le signe du dénominateur autour de a : tend-il vers 0^+ ou 0^- ?
3. Applique la règle des signes.

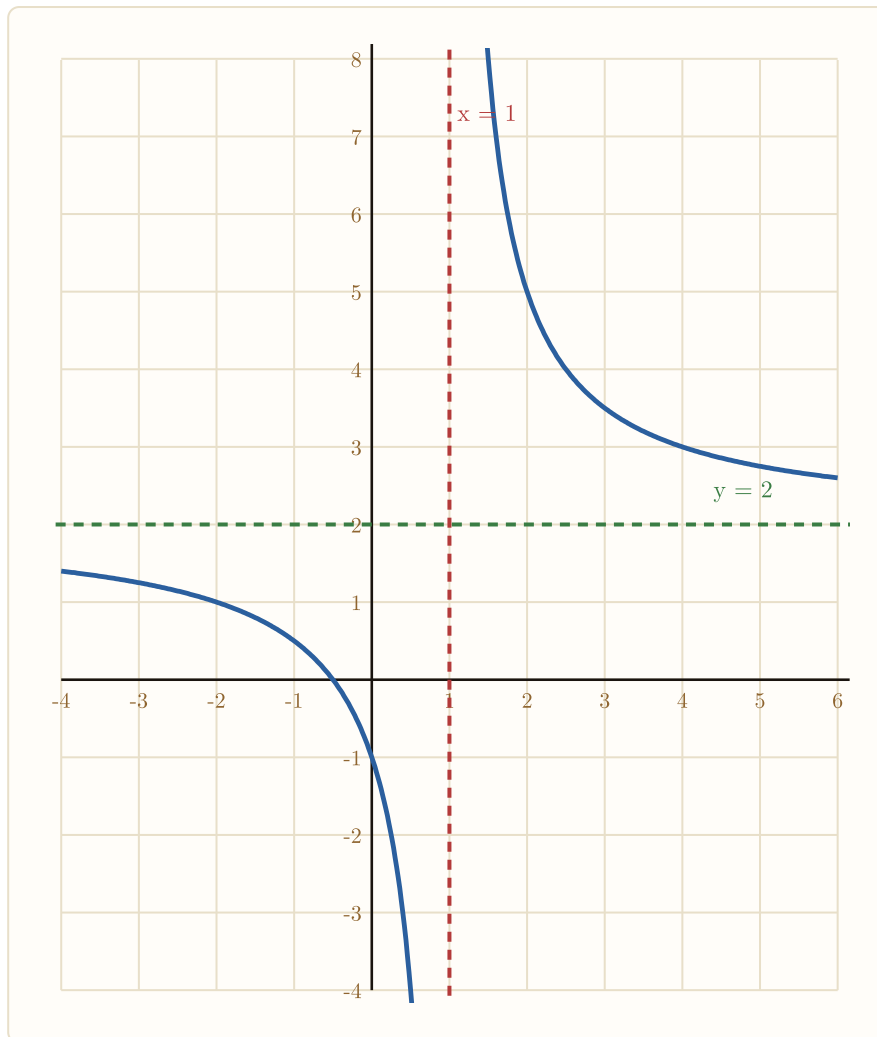
Pièges

- Écrire « $= +\infty$ » sans avoir regardé le signe du dénominateur.
- Écrire « $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = +\infty$ » : la limite n'existe pas, il faut distinguer 1^+ et 1^- .
- Oublier qu'un carré au dénominateur donne toujours le même signe des deux côtés.

Astuce : fais un mini tableau de signes du dénominateur. C'est rapide et infallible.

4. Asymptotes

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = B$ (ou en $-\infty$), la droite d'équation $y = B$ est une **asymptote horizontale** à la courbe.



La courbe de $f(x) = (2x + 1)/(x - 1)$ et ses deux asymptotes : $x = 1$ et $y = 2$

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ (même d'un seul côté), la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale**.

Position relative de la courbe et de l'asymptote $y = B$: on étudie le signe de $f(x) - B$. Si $f(x) - B > 0$, la courbe est au-dessus de l'asymptote ; sinon elle est en dessous.

Piège : une courbe **peut couper** son asymptote horizontale, et même la couper plusieurs fois (comme $\frac{\sin x}{x}$ avec l'axe des abscisses). L'asymptote décrit le comportement « à l'infini », pas ce qui se passe près de l'origine.

Astuce : quand on te demande de « justifier l'existence d'une asymptote », cite la limite. Le mot « asymptote » sans limite ne rapporte rien.

À faire maintenant : la fiche 1 (limites en l'infini).

5. Opérations sur les limites et formes indéterminées

Les règles sont les mêmes que pour les suites :

- **Somme :** $\ell + \infty = \infty$, $\infty + \infty = \infty$ (même signe).

- **Produit** : règle des signes ($\infty \times \infty$, $\ell \times \infty$ avec $\ell \neq 0$).
- **Quotient** : $\frac{\ell}{\infty} = 0$; $\frac{\ell}{0} = \pm\infty$ ($\ell \neq 0$, avec le signe du dénominateur).

Les quatre **formes indéterminées** : « $+\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ », « $\frac{0}{0}$ ». Il faut alors transformer l'écriture.

6. L'ordre de bataille pour lever une forme indéterminée

1. **Fraction rationnelle en $\pm\infty$** : factorise le numérateur et le dénominateur par leur terme de plus haut degré, puis simplifie. Seuls les termes dominants comptent : $\lim f(x)$ = limite du rapport des termes de plus haut degré.
2. **Forme $\frac{0}{0}$ en un réel a** : factorise par $(x - a)$ au numérateur et au dénominateur, simplifie, puis calcule la limite.
3. **Racines carrées** : multiplie par la quantité conjuguée. Attention à $\sqrt{x^2} = |x|$.
4. **Exponentielle** : en $+\infty$, divise par e^x pour faire apparaître e^{-x} . Sinon, utilise les croissances comparées (partie 9).

Exemple 1 (rationnelle). $f(x) = \frac{3x^2 + x}{x^2 - 2}$. En $+\infty$:

$$f(x) = \frac{x^2 \left(3 + \frac{1}{x}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)} = \frac{3 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x^2}} \longrightarrow 3$$

Exemple 2 ($\frac{0}{0}$). $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ en 1. On factorise :

$$\frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1 \longrightarrow 2$$

Exemple 3 (racine). $\sqrt{x^2 + x} - x$ en $+\infty$:

$$\frac{(x^2 + x) - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

Le grand piège des racines : $\sqrt{x^2} = |x|$, pas x . En $+\infty$, $|x| = x$. Mais en $-\infty$, $|x| = -x$. Ainsi $\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$ tend vers $+1$ en $+\infty$ et vers -1 en $-\infty$.

Astuce : en $-\infty$, pose $X = -x$: la limite en $-\infty$ de $f(x)$ devient la limite en $+\infty$ de $f(-X)$. Tu n'as plus à jongler avec les signes.

Un « $\frac{0}{0}$ » que l'on laisse tel quel, c'est un dénominateur qui a oublié de partir en vacances : il faut simplifier.

7. Limite d'une fonction composée

Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ et $\lim_{y \rightarrow b} v(y) = c$, alors $\lim_{x \rightarrow a} v(u(x)) = c$. On enchaîne les limites de l'intérieur vers l'extérieur.

Exemples.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} : -x^2 \rightarrow -\infty$ et $e^y \rightarrow 0$ quand $y \rightarrow -\infty$. Donc la limite est 0.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} : 1 + \frac{1}{x} \rightarrow 1$ et $\sqrt{y} \rightarrow 1$ quand $y \rightarrow 1$. Donc la limite est 1.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} : \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ et $e^y \rightarrow +\infty$. Donc la limite est $+\infty$; mais en 0^- , $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$ et la limite est 0.

Piège : avec $e^{1/x}$ en 0, les deux côtés donnent des limites différentes. Regarde toujours d'où vient x .

8. Théorèmes de comparaison et des gendarmes

- Si $f(x) \geq g(x)$ pour x grand et $\lim g = +\infty$, alors $\lim f = +\infty$.
- Si $f(x) \leq g(x)$ pour x grand et $\lim g = -\infty$, alors $\lim f = -\infty$.
- **Gendarmes :** si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si $\lim g = \lim h = \ell$, alors $\lim f = \ell$.

Ces théorèmes s'écrivent de la même façon en un réel a .

Astuces

- Un $\sin x$ ou un $\cos x$ dans l'expression ? Encadre-le : $-1 \leq \sin x \leq 1$.
- Pour une limite $+\infty$, **minore** ; pour $-\infty$, **majore** ; pour une limite finie, **encadre**.
- Un produit « fonction qui tend vers 0 $\times$ fonction bornée » tend vers 0 (par gendarmes, avec $|f \times g| \leq M|f|$).

Piège : ne divise jamais un encadrement par une quantité dont tu ne connais pas le signe, sous peine de retourner les inégalités.

9. Croissances comparées

Pour tout entier $n \geq 1$:

- **En $+\infty$:** $\lim \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, ce qui revient à $\lim x^n e^{-x} = 0$. L'exponentielle « gagne » toujours face à une puissance.
- **En $-\infty$:** $\lim x^n e^x = 0$.

Astuces

- Ces limites permettent de lever presque toutes les formes indéterminées avec exponentielle.
- Pour le cas $-\infty$, pose $X = -x$ pour te ramener à $+\infty$.
- En cas de doute, mets « e^x » en évidence.

Piège : écrire « $xe^{-x} = \infty \times 0 = 0$ » sans justification. C'est une forme indéterminée qu'on lève avec les croissances comparées : cite-les.

L'exponentielle gagne toujours. C'est presque injuste pour les polynômes.

À faire maintenant : la fiche 3 (comparaison et croissances comparées).

10. Lien avec les suites

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$, alors la suite $(f(n))$ tend vers ℓ . Plus généralement, si $u_n \rightarrow a$ et si $f(x) \rightarrow \ell$ quand $x \rightarrow a$, alors $f(u_n) \rightarrow \ell$. Par exemple, $e^{-n} \rightarrow 0$ puisque $e^{-x} \rightarrow 0$ en $+\infty$.

11. Lire les limites sur un tableau de variations ou un graphique

- Aux bornes d'un tableau de variations, les flèches se terminent par une limite : lis-la comme une information sur la courbe.
- Sur un graphique, une courbe qui « s'écrase » vers une droite horizontale à l'infini révèle une asymptote horizontale.
- Une courbe qui « monte ou descend le long » d'une droite verticale révèle une asymptote verticale.

12. Les 10 pépites pour gagner du temps et des points

1. **Domaine d'abord.** Les limites se cherchent aux bornes du domaine de définition.
2. **Rationnelle en $\pm\infty$:** seuls les termes de plus haut degré comptent.
3. **Dénominateur nul :** un mini tableau de signes.
4. $\frac{0}{0}$: factorise par $(x - a)$, ou multiplie par le conjugué.
5. **En $-\infty$:** pose $X = -x$ pour te ramener à $+\infty$.
6. **Avec des racines en $-\infty$:** écris $\sqrt{x^2} = -x$.
7. **Avec e^x en $+\infty$:** divise par e^x , ou cite les croissances comparées.
8. **Position relative :** étudie le signe de $f(x) - B$.
9. **Contrôle numérique :** calcule $f(1000)$ ou $f(-1000)$ pour vérifier ta limite. Ça ne prouve rien, mais ça détecte les erreurs.
10. **Rédaction :** écris « par somme », « par produit », « par composition », « par comparaison », « d'après le théorème des gendarmes ».

Complément du programme : démontrer les limites de l'exponentielle

Inégalité fondamentale. Pour tout réel x , $e^x \geq 1 + x$.

Démonstration. On pose $\varphi(x) = e^x - x - 1$. Alors $\varphi'(x) = e^x - 1$, qui est négatif si $x < 0$ et positif si $x > 0$.

φ décroît puis croît : son minimum est $\varphi(0) = 0$. Donc $\varphi(x) \geq 0$. $\square$

Limites en $\pm\infty$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

Démonstration. Comme $e^x \geq 1 + x$ et $1 + x \rightarrow +\infty$, le théorème de comparaison donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

En $-\infty$: $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$ et $-x \rightarrow +\infty$, donc $e^{-x} \rightarrow +\infty$ et $e^x \rightarrow 0$. $\square$

Croissance comparée. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Démonstration. On pose $\psi(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$. Alors $\psi'(x) = e^x - x \geq 1 > 0$ d'après l'inégalité fondamentale.

ψ est croissante sur $[0; +\infty[$ avec $\psi(0) = 1$, donc $e^x \geq \frac{x^2}{2}$ pour $x \geq 0$.

Pour $x > 0$: $\frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{2}$. Comme $\frac{x}{2} \rightarrow +\infty$, le théorème de comparaison conclut. $\square$

Pour tout entier $n \geq 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$.

Démonstration. On écrit $\frac{e^x}{x^n} = \left(\frac{e^{x/n}}{x}\right)^n = \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{x/n}}{x/n}\right)^n$.

Avec $X = \frac{x}{n} \rightarrow +\infty$, $\frac{e^X}{X} \rightarrow +\infty$. Chaque facteur tend vers $+\infty$, donc leur puissance n -ième aussi. $\square$

Astuce. Dans une forme indéterminée « $+\infty \times 0$ » comme $x^n e^{-x}$, l'exponentielle l'emporte toujours sur n'importe quelle puissance de x .

Tu as maintenant le cours. Passe aux trois fiches, puis aux exercices type bac.