

Limites de fonctions : exercices type bac

Trois exercices complets, dans le style de l'épreuve du bac : une fonction exponentielle avec deux asymptotes horizontales, une fonction rationnelle avec asymptote verticale et position relative, une fonction produit avec croissances comparées.

Les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une excellente copie de bac : domaine de définition, règle utilisée nommée à chaque limite, hypothèses vérifiées, conclusion à chaque question.

Durée conseillée : 25 à 30 minutes par exercice, sur papier, sans regarder la correction.

Comment t'entraîner efficacement

- Chronomètre-toi et rédige tout, comme le jour du bac.
- Si tu bloques sur une question, écris « on admet que... » et passe à la suivante.
- Ouvre les corrections question par question, et compare ta **rédaction**, pas seulement ton résultat.
- Pour chaque limite, note la règle que tu cites (somme, produit, quotient, composition, comparaison, gendarmes, croissances comparées).
- À la fin de chaque exercice, ouvre « Points clés attendus » : c'est la liste de ce que le correcteur cherche.

Exercice 1 : une fonction exponentielle et deux asymptotes

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$, puis déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. En déduire que $\mathcal{C}$ admet deux asymptotes horizontales, dont on donnera les équations.
4. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 3 - \frac{4}{e^x + 1}$. En déduire la position de $\mathcal{C}$ par rapport à la droite d'équation $y = 3$.
5. Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f .
6. Résoudre l'équation $f(x) = 1$.

Exercice 2 : une fonction rationnelle, asymptotes et position relative

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{(x - 2)^2}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Que peut-on en déduire ?
2. Déterminer la limite de f en 2. Que peut-on en déduire ?
3. Montrer que, pour tout $x \neq 2$, $f(x) - 2 = \frac{9(x - 1)}{(x - 2)^2}$.
4. Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à la droite d'équation $y = 2$.
5. La courbe $\mathcal{C}$ coupe-t-elle la droite d'équation $y = 2$? Si oui, en quel point ?

Exercice 3 : un produit avec exponentielle et croissances comparées

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x + 2)e^{-x}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer la limite de g en $-\infty$.
2. Déterminer la limite de g en $+\infty$. Que peut-on en déduire ?
3. Calculer $g'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau de variations de g .
4. Résoudre l'équation $g(x) = 0$, puis étudier le signe de $g(x)$.
5. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \leq e$.

Les réflexes à retenir

- Une étude de fonction commence par le **domaine**, puis les **limites aux bornes**, puis la **dérivée**.
- Pour une asymptote, écris toujours la **limite** qui la justifie.
- La **position relative** se trouve en étudiant le signe de $f(x) - B$.
- Avant de dériver, **justifie la dérivabilité** ; avant d'étudier un signe, justifie chaque facteur ($e^x > 0$, carré positif).
- Pour un produit avec e^x ou e^{-x} , pense aux **croissances comparées**.
- Une asymptote peut être coupée par la courbe : ne le prends pas pour une erreur.

Aller plus loin avec les vrais sujets

Quand tu es à l'aise avec ce chapitre, entraîne-toi sur les études de fonctions des sujets officiels des années précédentes.

Ils sont disponibles sur le site de l'[APMEP](https://apmep.fr/).

Chronomètre-toi et rédige comme le jour du bac.