

Limites de fonctions : exercices type bac

Trois exercices complets, dans le style de l'épreuve du bac : une fonction exponentielle avec deux asymptotes horizontales, une fonction rationnelle avec asymptote verticale et position relative, une fonction produit avec croissances comparées.

Les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une excellente copie de bac : domaine de définition, règle utilisée nommée à chaque limite, hypothèses vérifiées, conclusion à chaque question.

Durée conseillée : 25 à 30 minutes par exercice, sur papier, sans regarder la correction.

Comment t'entraîner efficacement

- Chronomètre-toi et rédige tout, comme le jour du bac.
- Si tu bloques sur une question, écris « on admet que... » et passe à la suivante.
- Ouvre les corrections question par question, et compare ta **rédaction**, pas seulement ton résultat.
- Pour chaque limite, note la règle que tu cites (somme, produit, quotient, composition, comparaison, gendarmes, croissances comparées).
- À la fin de chaque exercice, ouvre « Points clés attendus » : c'est la liste de ce que le correcteur cherche.

Exercice 1 : une fonction exponentielle et deux asymptotes

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$, puis déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. En déduire que $\mathcal{C}$ admet deux asymptotes horizontales, dont on donnera les équations.
4. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 3 - \frac{4}{e^x + 1}$. En déduire la position de $\mathcal{C}$ par rapport à la droite d'équation $y = 3$.
5. Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f .
6. Résoudre l'équation $f(x) = 1$.

Correction de la question 1

Pour tout réel x , $e^x + 1 > 0$: la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$. Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, on a, par somme :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3e^x - 1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 1) = 1$$

La limite du dénominateur est non nulle : par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

Correction de la question 2

La vérification. Pour tout réel x , $e^{-x} \neq 0$. On multiplie le numérateur et le dénominateur de $f(x)$ par e^{-x} :

$$f(x) = \frac{(3e^x - 1)e^{-x}}{(e^x + 1)e^{-x}} = \frac{3 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

car $e^x \times e^{-x} = 1$.

La limite. Quand $x \rightarrow +\infty$, $-x \rightarrow -\infty$ et $e^y \rightarrow 0$ quand $y \rightarrow -\infty$. Par composition,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$. Par somme, $\lim(3 - e^{-x}) = 3$ et $\lim(1 + e^{-x}) = 1$. Par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$$

Correction de la question 3

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$:

la droite d'équation $y = -1$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$:

la droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

Correction de la question 4

L'identité. Pour tout réel x :

$$3 - \frac{4}{e^x + 1} = \frac{3(e^x + 1) - 4}{e^x + 1} = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} = f(x)$$

La position. Donc $f(x) - 3 = -\frac{4}{e^x + 1}$. Or $e^x + 1 > 0$ pour tout réel x , donc $\frac{4}{e^x + 1} > 0$ et $f(x) - 3 < 0$.

La courbe $\mathcal{C}$ est strictement en dessous de la droite d'équation $y = 3$.

Complément : $f(x) + 1 = \frac{3e^x - 1 + e^x + 1}{e^x + 1} = \frac{4e^x}{e^x + 1} > 0$. Donc $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de la droite d'équation $y = -1$.

Correction de la question 5

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur $e^x + 1$ ne s'annule pas. On applique $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, avec $u(x) = 3e^x - 1$ et $v(x) = e^x + 1$, donc $u'(x) = 3e^x$ et $v'(x) = e^x$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{3e^x(e^x + 1) - (3e^x - 1)e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x [3e^x + 3 - 3e^x + 1]}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$$

Or $e^x > 0$ et $(e^x + 1)^2 > 0$ pour tout x . Donc $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de -1 (limite en $-\infty$) à 3 (limite en $+\infty$).

Correction de la question 6

Pour tout réel x , $e^x + 1 \neq 0$, donc :

$$f(x) = 1 \iff 3e^x - 1 = e^x + 1 \iff 2e^x = 2 \iff e^x = 1 \iff x = 0$$

car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $e^0 = 1$.

L'équation $f(x) = 1$ a pour unique solution $x = 0$.

Comme f est strictement croissante et $f(0) = 1$, on a aussi $f(x) \geq 1 \iff x \geq 0$.

Points clés attendus pour l'exercice 1

- **Q1 et Q2** : chaque limite est justifiée (somme, quotient, composition), la limite du dénominateur est non nulle.
- **Q3** : chaque asymptote est écrite avec la limite qui la justifie, et l'équation de la droite.
- **Q4** : l'identité est démontrée en partant d'un membre ; la position se déduit du signe, justifié par $e^x + 1 > 0$.
- **Q5** : dérivabilité justifiée, formule $\left(\frac{u}{v}\right)'$ citée, signe de f' justifié, conclusion sur les variations.

- Q6 : équivalences successives, argument sur l'exponentielle.

Exercice 2 : une fonction rationnelle, asymptotes et position relative

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{(x - 2)^2}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Que peut-on en déduire ?
2. Déterminer la limite de f en 2. Que peut-on en déduire ?
3. Montrer que, pour tout $x \neq 2$, $f(x) - 2 = \frac{9(x - 1)}{(x - 2)^2}$.
4. Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à la droite d'équation $y = 2$.
5. La courbe $\mathcal{C}$ coupe-t-elle la droite d'équation $y = 2$? Si oui, en quel point ?

Correction de la question 1

Pour tout $x \neq 0$ et $x \neq 2$, on met x^2 en facteur au numérateur et au dénominateur :

$$f(x) = \frac{x^2 \left(2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2} = \frac{2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{\left(1 - \frac{2}{x}\right)^2}$$

Quand $x \rightarrow +\infty$ (ou $x \rightarrow -\infty$), $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ et $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$. Par somme, le numérateur tend vers 2 et $1 - \frac{2}{x}$ tend vers 1, donc, par produit, $\left(1 - \frac{2}{x}\right)^2$ tend vers 1. Par quotient :

$\lim f = 2$ en $+\infty$ et en $-\infty$

Conséquence : la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Correction de la question 2

Quand $x \rightarrow 2$, le numérateur $2x^2 + x - 1$ tend vers $2 \times 4 + 2 - 1 = 9$, un réel strictement positif.

Le dénominateur $(x - 2)^2$ tend vers 0 en restant strictement positif (c'est un carré, et $x \neq 2$), aussi bien par valeurs inférieures que supérieures.

Par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$$

Conséquence : la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}$.

Correction de la question 3

Pour tout $x \neq 2$:

$$f(x) - 2 = \frac{2x^2 + x - 1 - 2(x - 2)^2}{(x - 2)^2}$$

Comme $2(x - 2)^2 = 2x^2 - 8x + 8$, le numérateur vaut :

$$2x^2 + x - 1 - 2x^2 + 8x - 8 = 9x - 9 = 9(x - 1)$$

Donc, pour tout $x \neq 2$, $f(x) - 2 = \frac{9(x - 1)}{(x - 2)^2}$.

Correction de la question 4

Pour tout $x \neq 2$, $(x - 2)^2 > 0$. Le signe de $f(x) - 2$ est donc celui de $x - 1$.

- Si $x > 1$ et $x \neq 2$, alors $f(x) - 2 > 0$:

$\mathcal{C}$ est au-dessus de la droite d'équation $y = 2$.

- Si $x < 1$, alors $f(x) - 2 < 0$:

$\mathcal{C}$ est en dessous de cette droite.

- Si $x = 1$, alors $f(x) - 2 = 0$:

$\mathcal{C}$ coupe la droite.

Correction de la question 5

Pour tout $x \neq 2$:

$$f(x) = 2 \iff f(x) - 2 = 0 \iff \frac{9(x - 1)}{(x - 2)^2} = 0 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1$$

La courbe $\mathcal{C}$ coupe la droite d'équation $y = 2$ en un unique point, d'abscisse 1 : c'est le point de coordonnées $(1; 2)$.

Vérification : $f(1) = \frac{2 + 1 - 1}{(1 - 2)^2} = 2$

À retenir : l'asymptote horizontale peut être coupée par la courbe. Ce n'est pas contradictoire, car l'asymptote décrit le comportement à l'infini.

Points clés attendus pour l'exercice 2

- **Q1** : mise en facteur de x^2 justifiée, règles utilisées nommées, asymptote horizontale avec sa limite.
- **Q2** : limite du numérateur non nulle, signe du dénominateur justifié (carré), asymptote verticale avec sa limite.
- **Q3** : identité démontrée en partant de $f(x) - 2$, avec le développement de $(x - 2)^2$.
- **Q4** : signe étudié cas par cas ($x > 1$, $x < 1$, $x = 1$), avec la condition $x \neq 2$.
- **Q5** : équivalences, point d'intersection écrit avec ses deux coordonnées.

Exercice 3 : un produit avec exponentielle et croissances comparées

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x + 2)e^{-x}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer la limite de g en $-\infty$.
2. Déterminer la limite de g en $+\infty$. Que peut-on en déduire ?
3. Calculer $g'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau de variations de g .
4. Résoudre l'équation $g(x) = 0$, puis étudier le signe de $g(x)$.
5. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \leq e$.

Correction de la question 1

Quand $x \rightarrow -\infty$, $x + 2 \rightarrow -\infty$. De plus $-x \rightarrow +\infty$ et $e^y \rightarrow +\infty$ quand $y \rightarrow +\infty$, donc, par composition, $e^{-x} \rightarrow +\infty$. Par produit :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

Correction de la question 2

Pour tout x , $g(x) = xe^{-x} + 2e^{-x}$. Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$. Par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$. Par somme :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

Conséquence : la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

Correction de la question 3

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de $x \mapsto x + 2$ et de $x \mapsto e^{-x}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ (la seconde par composition). On applique $(uv)' = u'v + uv'$, avec $u(x) = x + 2$, $v(x) = e^{-x}$, donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -e^{-x}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = 1 \times e^{-x} + (x + 2) \times (-e^{-x}) = e^{-x}(1 - x - 2)$$

$$g'(x) = -(x + 1)e^{-x}$$

Comme $e^{-x} > 0$ pour tout x , $g'(x)$ est du signe de $-(x + 1)$: $g'(x) > 0$ si $x < -1$, $g'(x) = 0$ si $x = -1$, $g'(x) < 0$ si $x > -1$.

Tableau de variations. g est strictement croissante sur $] -\infty ; -1]$, de la limite $-\infty$ à $g(-1) = (-1 + 2)e^1 = e$. Puis g est strictement décroissante sur $[-1 ; +\infty[$, de e à la limite 0 .

Correction de la question 4

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} \neq 0$. Donc $g(x) = 0 \iff (x + 2)e^{-x} = 0 \iff x + 2 = 0 \iff x = -2$.

L'équation $g(x) = 0$ a pour unique solution $x = -2$.

Comme $e^{-x} > 0$, $g(x)$ est du signe de $x + 2$: $g(x) < 0$ pour $x < -2$, $g(-2) = 0$, et $g(x) > 0$ pour $x > -2$.

Correction de la question 5

D'après le tableau de variations, g est croissante sur $] -\infty ; -1]$ et décroissante sur $[-1 ; +\infty[$. Elle admet un maximum en $x = -1$, égal à $g(-1) = e$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \leq e$.

Astuce : quand on te demande de déduire une inégalité d'une étude de variations, pense d'abord au maximum ou au minimum.

Points clés attendus pour l'exercice 3

- **Q1 et Q2** : composition et produit justifiés, croissances comparées citées avec le nom du résultat, asymptote avec sa limite.
- **Q3** : dérivabilité justifiée, formule $(uv)'$ citée, factorisation par e^{-x} , signe justifié ($e^{-x} > 0$), tableau avec les limites et la valeur du maximum.
- **Q4** : produit nul, $e^{-x} \neq 0$, tableau de signes.
- **Q5** : inégalité déduite du maximum, avec une phrase de conclusion.

Les réflexes à retenir

- Une étude de fonction commence par le **domaine**, puis les **limites aux bornes**, puis la **dérivée**.
- Pour une asymptote, écris toujours la **limite** qui la justifie.
- La **position relative** se trouve en étudiant le signe de $f(x) - B$.
- Avant de dériver, **justifie la dérivabilité** ; avant d'étudier un signe, justifie chaque facteur ($e^x > 0$, carré positif).
- Pour un produit avec e^x ou e^{-x} , pense aux **croissances comparées**.
- Une asymptote peut être coupée par la courbe : ne le prends pas pour une erreur.

Aller plus loin avec les vrais sujets

Quand tu es à l'aise avec ce chapitre, entraîne-toi sur les études de fonctions des sujets officiels des années précédentes.

Ils sont disponibles sur le site de l'[APMEP](https://apmep.fr/).

Chronomètre-toi et rédige comme le jour du bac.