

Guide de rédaction : limites de fonctions

Ce guide complète le Guide de rédaction général.

Il rassemble, pour le chapitre Limites de fonctions, les **treize situations qui reviennent au bac** et, pour chacune, la rédaction modèle.

Dans une étude de fonction, les limites sont souvent les premiers points de l'exercice : bien les rédiger, c'est démarrer avec de l'avance.

Le principe du chapitre

Avec les limites de fonctions, un correcteur regarde surtout **quatre choses** :

- la **règle nommée** à chaque limite (somme, produit, quotient, composition, comparaison, gendarmes, croissances comparées) ;
- le **signe** justifié quand le dénominateur tend vers 0 ;
- le **côté** ($x \rightarrow a^+$ ou $x \rightarrow a^-$) ;
- la **phrase de conclusion** qui traduit la limite en asymptote.

1. Les treize situations et leur rédaction modèle

Situation 1 : fraction rationnelle en $\pm\infty$ ($f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{(x - 2)^2}$).

« Pour tout $x \neq 0$ et $x \neq 2$, $f(x) = \frac{x^2 \left(2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2} = \frac{2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{\left(1 - \frac{2}{x}\right)^2}$.

Quand x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$), $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x^2}$ tendent vers 0.

Par somme, le numérateur tend vers 2 et $1 - \frac{2}{x}$ tend vers 1, donc $\left(1 - \frac{2}{x}\right)^2$ tend vers 1 par produit.

Par quotient, $\lim f = 2$ en $+\infty$ et en $-\infty$. »

Situation 2 : racine carrée en $+\infty$ (quantité conjuguée) ($g(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$).

« Pour tout $x > 0$, $g(x) = \frac{(x^2 + x) - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1}$, en divisant par $x =$

$\sqrt{x^2} > 0$. Quand $x \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, donc $\sqrt{1 + \frac{1}{x}} \rightarrow 1$ par composition. Par somme et quotient, $\lim g = \frac{1}{2}$. »

Situation 3 : racine carrée en $-\infty$ (la valeur absolue) ($h(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$).

« Pour tout $x \neq 0$, $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$. En $-\infty$, $x < 0$ donc $|x| = -x$, et $h(x) = -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$. Par composition et par produit, $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -1$. »

Piège : écrire $\sqrt{x^2} = x$ en $-\infty$ est faux et donne le mauvais signe. Écris toujours $|x|$, puis précise son signe.

Situation 4 : dénominateur qui tend vers 0, avec le signe ($f(x) = \frac{2x-1}{x^2-4}$, limite en 2^+).

« Quand $x \rightarrow 2^+$, $2x-1 \rightarrow 3 > 0$. De plus $x^2-4 = (x-2)(x+2)$; pour $x > 2$, $x-2 > 0$ et $x+2 > 0$, donc $x^2-4 > 0$, et x^2-4 tend vers 0. Ainsi x^2-4 tend vers 0^+ . Par quotient, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$. »

Astuce : écris un mini tableau de signes du dénominateur et recopie-le dans ta phrase. Pour $x \rightarrow 2^-$, $x-2 < 0$ et $x+2 > 0$ donnent 0^- et la limite est $-\infty$.

Situation 5 : la forme $\frac{0}{0}$ (limite en 2 de $\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$).

« En 2, le numérateur et le dénominateur tendent vers 0 : c'est une forme indéterminée.

Pour $x \neq 2$ et $x \neq 1$, $x^2-4 = (x-2)(x+2)$ et $x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$.

Donc le quotient vaut $\frac{x+2}{x-1}$.

Par quotient, sa limite en 2 est $\frac{4}{1} = 4$. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$. »

Situation 6 : limite d'une fonction composée ($\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2}$).

« Quand $x \rightarrow +\infty$, $-x^2 \rightarrow -\infty$. Comme $\lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$, par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0$. »

Avec $e^{1/x}$ en 0, distingue les côtés : en 0^+ , $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ et la limite est $+\infty$; en 0^- , $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$ et la limite est 0.

Situation 7 : comparaison et gendarmes.

Comparaison. « Pour tout x , $\sin x \geq -1$, donc $f(x) = x + \sin x \geq x - 1$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$, d'après le théorème de comparaison, $\lim f = +\infty$. »

Gendarmes. « Pour tout $x > 0$, $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$. »

« Pour tout $x > 0$ » : cette précision justifie la division par x . Ne divise jamais sans connaître le signe.

Situation 8 : croissances comparées ($g(x) = (x + 2)e^{-x}$ en $+\infty$).

« Pour tout x , $g(x) = xe^{-x} + 2e^{-x}$. Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$. Par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$. Par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. »

Cite le résultat par son nom : « par croissances comparées ». Sans lui, « $\infty \times 0 = 0$ » est faux.

Situation 9 : asymptotes.

Horizontale. « Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$, la droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$. »

Verticale. « Comme $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$, la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}$. »

Une asymptote se conclut toujours à partir d'une limite écrite juste avant. Ne la donne jamais « à l'œil ».

Situation 10 : position relative de la courbe et d'une asymptote.

« Pour tout $x \neq 2$, $f(x) - 2 = \frac{9(x-1)}{(x-2)^2}$.

Comme $(x-2)^2 > 0$, $f(x) - 2$ est du signe de $x - 1$.

Donc, pour $x > 1$ ($x \neq 2$), $\mathcal{C}$ est au-dessus de la droite d'équation $y = 2$; pour $x < 1$, $\mathcal{C}$ est en dessous ; pour $x = 1$, $\mathcal{C}$ coupe la droite. »

Situation 11 : le plan d'une étude de fonction complète.

1. **Domaine de définition** : « La fonction f est définie sur ... car ... ».
2. **Limites aux bornes** : chacune avec sa règle nommée.
3. **Asymptotes** : une phrase par asymptote, appuyée sur une limite.
4. **Dérivabilité et dérivée** : « f est dérivable sur ... comme quotient (produit, composée) de fonctions dérivables... Pour tout x , $f'(x) = \dots$ ».
5. **Signe de $f'(x)$** : chaque facteur est justifié ($e^x > 0$, carré positif).
6. **Tableau de variations** : flèches, limites aux bornes et valeurs remarquables.
7. **Conclusion** : équation, inégalité ou position demandée.

Situation 12 : le tableau de variations.

Le tableau doit contenir :

- les bornes de l'ensemble de définition ;
- le signe de $f'(x)$;
- les flèches ;
- les **limites aux bornes** ;
- les **valeurs aux extremums** (par exemple $g(-1) = e$).

Un tableau sans limites est un tableau incomplet.

Situation 13 : vrai/faux et contre-exemple.

« L'affirmation est **fausse**.

Contre-exemple : $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ tend vers 0 en $+\infty$ mais coupe l'axe des abscisses en chaque multiple de π .

Une courbe peut donc couper son asymptote horizontale. »

2. Avant / après sur les limites de fonctions**a) Une limite avec racine en $-\infty$.**

« $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \rightarrow \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \frac{x}{x} = 1.$ »

« En $-\infty$, $\sqrt{x^2+1} = |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = -x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$. Donc le quotient vaut $-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ et tend vers -1 . »

b) Un dénominateur nul.

$$\ll \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+1}{x-1} = \frac{4}{0} = +\infty. \gg$$

« Quand $x \rightarrow 1$, $3x+1 \rightarrow 4 > 0$.

En 1^+ , $x-1 \rightarrow 0^+$, donc la limite est $+\infty$; en 1^- , $x-1 \rightarrow 0^-$, donc la limite est $-\infty$.

La limite en 1 n'existe pas, mais la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale. »

c) Une croissance comparée.

$$\ll xe^{-x} = \infty \times 0 = 0. \gg$$

« Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$. »

3. Les erreurs de rédaction propres à ce chapitre

- Écrire une limite sans nommer la règle (somme, produit, quotient, composition).
- Écrire « $= \infty - \infty = 0$ », « $= \frac{\infty}{\infty} = 1$ » : ce ne sont pas des égalités.
- Donner la limite d'un quotient dont le dénominateur tend vers 0, sans le signe ni le côté.
- Écrire « $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ » quand les deux côtés diffèrent.
- Confondre un « trou » (limite finie, pas d'asymptote) et une asymptote verticale.
- Oublier la valeur absolue en sortant un x d'une racine, surtout en $-\infty$.
- Diviser un encadrement par une quantité sans préciser son signe.
- Donner une asymptote sans la limite qui la justifie, ou un tableau de variations sans limites.
- Écrire « $\lim \sin x$ » ou « $\lim \cos x$ » en $+\infty$: ces limites n'existent pas.

4. La check-list du chapitre Limites de fonctions

- J'ai indiqué le **domaine** et j'ai cherché les limites **aux bornes**.
- Chaque limite est justifiée par une **règle nommée**.
- Pour un dénominateur nul, j'ai écrit le **signe** et le **côté**.
- Pour une forme indéterminée, j'ai écrit la **transformation** (factorisation, conjuguée, terme dominant).
- En $-\infty$, j'ai fait attention à $|x| = -x$ et à la parité des exposants.
- Chaque asymptote est appuyée sur une **limite écrite**.
- Dans le tableau de variations, j'ai mis les **limites aux bornes** et les valeurs des extremums.
- J'ai vérifié une limite avec une valeur numérique (par exemple $f(1000)$).

Une limite sans règle nommée, c'est un but marqué sans que l'arbitre l'ait vu : pas de but, pas de point.