

Limites de fonctions**Fiche Standard**

Nom : _____

Date : _____

Exercice S1 : Étude complète d'une fonction rationnelle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ par $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 1}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. En déduire une asymptote horizontale Δ à $\mathcal{C}$.
2. Déterminer les limites de f en -1 et en 1 (quatre limites). Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}$?
3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, $f(x) - 1 = \frac{-(x+5)}{x^2 - 1}$.
4. Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de Δ . La courbe coupe-t-elle Δ ? Si oui, en quel point ?

Exercice S2 : Un modèle de diffusion

Le nombre d'abonnés d'un service en ligne, en millions, est modélisé à l'instant t (en années depuis le lancement, $t \geq 0$) par $N(t) = f(t)$ où $f(x) = \frac{6}{1 + 2e^{-x}}$, pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire les asymptotes de la courbe de f .
2. Montrer que, pour tout réel x , $f(x) = \frac{6e^x}{e^x + 2}$, puis que $f(x) < 6$.
3. Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
4. Interpréter dans le contexte : $N(0)$, le sens de variation de N et la limite de N en $+\infty$.
5. On souhaite déterminer le premier entier n tel que $N(n) \geq 5,9$.
 - a) Écrire en Python une boucle `while` qui détermine cet entier (la fonction exponentielle est `exp` du module `math`).
 - b) Retrouver la valeur obtenue par le calcul : montrer que $N(t) \geq 5,9 \iff e^t \geq 118$, puis conclure en utilisant $e^4 \approx 54,6$ et $e^5 \approx 148,4$.

Exercice S3 : Racine carrée et asymptotes obliques

Une droite d'équation $y = ax + b$ est dite *asymptote oblique* à la courbe de f en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) si $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ (respectivement en $-\infty$).

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 1}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe.

1. Vérifier que $x^2 + 4x + 1 = (x + 2)^2 - 3$. En déduire que f est définie sur $D =]-\infty; -2 - \sqrt{3}] \cup [-2 + \sqrt{3}; +\infty[$.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Montrer que, pour $x \geq -2 + \sqrt{3}$, $f(x) - (x + 2) = \frac{-3}{f(x) + x + 2}$. En déduire que la droite d_1 d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $+\infty$, et la position de $\mathcal{C}$ par rapport à d_1 .
4. Montrer que, pour $x \leq -2 - \sqrt{3}$, $f(x) - (-x - 2) = \frac{-3}{f(x) - x - 2}$. En déduire que la droite d_2 d'équation $y = -x - 2$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.
5. Montrer que $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = -2$. Quel lien avec les questions 3 et 4 ?

Exercice S4 : Amortissement et gendarmes

Partie A. Un ressort est écarté de sa position d'équilibre. Son écart (en cm) à l'instant $t \geq 0$ (en secondes) est modélisé par $d(t) = 5e^{-t} \cos(2t)$.

1. Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $-5e^{-t} \leq d(t) \leq 5e^{-t}$. En déduire la limite de d en $+\infty$.
2. Écrire un programme Python qui renvoie le plus petit entier n tel que $5e^{-n} < 10^{-3}$. Le justifier par le calcul avec $e^8 \approx 2981$ et $e^9 \approx 8103$.
3. En déduire que, pour tout $t \geq n$, l'écart du ressort est inférieur à 10^{-3} cm en valeur absolue.

Partie B. Soit $g(x) = \frac{x + \cos x}{2x + \sin x}$ pour $x \geq 1$.

4. Justifier que g est bien définie sur $[1; +\infty[$.

5. Montrer que $g(x) = \frac{1 + \frac{\cos x}{x}}{2 + \frac{\sin x}{x}}$, puis déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

Exercice S5 : Retrouver une fonction

Soit $f(x) = (ax + b)e^{-x}$, où a et b sont deux réels. Sa courbe $\mathcal{C}$ passe par le point $A(0; 3)$ et admet une tangente horizontale au point d'abscisse 2.

1. Exprimer $f'(x)$ en fonction de a , b et x .
2. Déterminer a et b . On suppose désormais que $f(x) = 3(1 - x)e^{-x}$.
3. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. En déduire une asymptote à $\mathcal{C}$.
4. Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$ (avec les limites).
5. Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à son asymptote.

Exercice S6 : Coût moyen de production

Une entreprise fabrique q centaines d'objets ($q > 0$). Le coût moyen d'un objet, en euros, est $C(q) = 2q + 3 + \frac{50}{q}$.

1. Déterminer $\lim_{q \rightarrow 0^+} C(q)$ et $\lim_{q \rightarrow +\infty} C(q)$. Interpréter la première limite (on pourra penser aux frais fixes).
2. Une droite d'équation $y = aq + b$ est dite *asymptote oblique* à la courbe de C en $+\infty$ si $C(q) - (aq + b) \rightarrow 0$ quand $q \rightarrow +\infty$. Montrer que la droite d d'équation $y = 2q + 3$ est asymptote oblique à la courbe de C en $+\infty$ et préciser la position de la courbe par rapport à d .
3. Montrer que $C'(q) = \frac{2(q-5)(q+5)}{q^2}$ et dresser le tableau de variations de C .
4. Pour quelle production le coût moyen est-il minimal ? Quel est ce coût ?
5. Montrer que $C(q) \leq 25 \iff q^2 - 11q + 25 \leq 0$, puis déterminer l'ensemble des valeurs de q pour lesquelles le coût moyen ne dépasse pas 25 euros.

Exercice S7 : Limites et nombre dérivé de l'exponentielle

On rappelle que la fonction exponentielle est dérivable en 0 de nombre dérivé $e^0 = 1$.

1. En déduire $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.
2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = 2$ (on écrira $\frac{e^{2x} - 1}{x} = 2 \times \frac{e^{2x} - 1}{2x}$).
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{e^x - 1}$.
4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{1/x} - 1)$ en posant $X = \frac{1}{x}$.
5. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x}$.

Exercice S8 : Limites à partir d'un tableau de variations

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dont le tableau de variations est le suivant.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	2	$+\infty$	$+\infty$
			-3

1. Donner les équations des asymptotes à la courbe de f .

2. Déterminer, en justifiant, les limites aux bornes de leurs ensembles de définition :
 - a) $g(x) = e^{f(x)}$ en $-\infty$, en 1^- , en 1^+ et en $+\infty$;
 - b) $h(x) = \frac{1}{f(x) - 2}$ en $-\infty$ et en 1^- (on commencera par justifier que $f(x) > 2$ sur $] -\infty ; 1[$) ;
 - c) $k(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0^+ et en 0^- .
3. Soient les suites $u_n = 1 + \frac{1}{n+1}$ et $v_n = n$. Déterminer les limites de $(f(u_n))$ et de $(f(v_n))$.

Exercice S9 : Discussion selon un paramètre

Pour tout réel m , on définit $f_m(x) = \frac{mx+4}{x-2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, et on note $\mathcal{C}_m$ sa courbe.

1. Déterminer la limite de f_m en $+\infty$ et en $-\infty$. En déduire une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_m$.
2. Montrer que $f_m(x) - m = \frac{2m+4}{x-2}$.
3. Cas $m = -2$: simplifier $f_{-2}(x)$. La courbe $\mathcal{C}_{-2}$ admet-elle une asymptote verticale ? Que représente-t-elle ?
4. Cas $m \neq -2$: déterminer, suivant le signe de $m+2$, les limites de f_m en 2^+ et en 2^- . En déduire une asymptote verticale.
5. Pour $m \neq -2$, étudier la position de $\mathcal{C}_m$ par rapport à son asymptote horizontale suivant les valeurs de m .

Exercice S10 : Branches infinies (approfondissement du programme)

Soit f une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. On étudie le comportement de sa courbe $\mathcal{C}$ à l'aide de la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$.

- Si $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 0$: branche parabolique de direction l'axe des abscisses.
 - Si $\frac{f(x)}{x} \rightarrow +\infty$: branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
 - Si $\frac{f(x)}{x} \rightarrow a$ avec a réel non nul : si de plus $f(x) - ax \rightarrow b$ avec b réel, la droite $y = ax + b$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$; si $f(x) - ax \rightarrow +\infty$, la droite $y = ax$ n'est pas asymptote, et $\mathcal{C}$ présente une branche parabolique de direction cette droite.
1. Déterminer la nature de la branche infinie en $+\infty$ pour chacune des fonctions suivantes.
 - a) $f_1(x) = \sqrt{x}$
 - b) $f_2(x) = x^2$
 - c) $f_3(x) = e^x$
 - d) $f_4(x) = x + \sqrt{x}$
 - e) $f_5(x) = 2x - 1 + e^{-x}$
 2. Soit f telle que la droite d'équation $y = ax + b$ soit asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $+\infty$ ($a \neq 0$). Montrer que $\frac{f(x)}{x} \rightarrow a$.
 3. La réciproque est-elle vraie ? Justifier avec une des fonctions de la question 1.