

Corrigé : Limites de fonctions

Fiche Standard

S1.

- Pour $x \neq 0$: $f(x) = \frac{x^2(1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2})}{x^2(1 - \frac{1}{x^2})} = \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}}$. Quand $x \rightarrow \pm\infty$, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ et $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$, donc par somme le numérateur tend vers 1 et le dénominateur vers 1 (non nul). Par quotient : **Conclusion** : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = \lim_{x \rightarrow -\infty} f = 1$. La droite Δ d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
- On a $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$. En 1. Le numérateur tend vers $1 - 1 - 6 = -6 < 0$ et $x + 1 \rightarrow 2 > 0$. Si $x > 1$, $x - 1 > 0$ donc $x^2 - 1 \rightarrow 0^+$; si $x < 1$, $x^2 - 1 \rightarrow 0^-$. Par quotient : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f = +\infty$.
En -1. Le numérateur tend vers $1 + 1 - 6 = -4 < 0$ et $x - 1 \rightarrow -2 < 0$. Si $x > -1$, $x + 1 > 0$ donc $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) < 0$, et $x^2 - 1 \rightarrow 0^-$; si $x < -1$, $x + 1 < 0$ donc $x^2 - 1 > 0$, et $x^2 - 1 \rightarrow 0^+$. Par quotient : $\lim_{x \rightarrow -1^+} f = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^-} f = -\infty$.
Conclusion : les droites d'équations $x = 1$ et $x = -1$ sont asymptotes verticales à $\mathcal{C}$.
- Pour tout $x \neq \pm 1$: $f(x) - 1 = \frac{x^2 - x - 6 - (x^2 - 1)}{x^2 - 1} = \frac{-x - 5}{x^2 - 1} = \frac{-(x + 5)}{x^2 - 1}$.
- Le signe de $f(x) - 1$ se lit dans le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$	-5	-1	1	$+\infty$	
$-(x+5)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
x^2-1	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)-1$	$+$	0	$-$	$+$	$-$	

Conclusion : $\mathcal{C}$ est au-dessus de Δ sur $] -\infty; -5[$ et sur $] -1; 1[$; elle est en dessous de Δ sur $] -5; -1[$ et sur $] 1; +\infty[$. Elle coupe Δ uniquement en $x = -5$, au point de coordonnées $(-5; 1)$ (en effet $f(-5) = \frac{25 + 5 - 6}{24} = 1$).

S2.

- Quand $x \rightarrow -\infty$, $-x \rightarrow +\infty$ donc $e^{-x} \rightarrow +\infty$ (composition), puis $1 + 2e^{-x} \rightarrow +\infty$. Par quotient, $f(x) \rightarrow 0$. Quand $x \rightarrow +\infty$, $e^{-x} \rightarrow 0$ donc $1 + 2e^{-x} \rightarrow 1$ et, par quotient, $f(x) \rightarrow 6$. **Conclusion** : la droite $y = 0$ est asymptote horizontale en $-\infty$ et la droite $y = 6$ est asymptote horizontale en $+\infty$.
- On multiplie numérateur et dénominateur par $e^x > 0$: $f(x) = \frac{6e^x}{e^x + 2e^{-x}e^x} = \frac{6e^x}{e^x + 2}$. Puis $6 - f(x) = \frac{6(e^x + 2) - 6e^x}{e^x + 2} = \frac{12}{e^x + 2} > 0$, donc $f(x) < 6$.
- $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 6e^x$ et $v(x) = e^x + 2$ ($v > 0$). Alors $f'(x) = \frac{6e^x(e^x + 2) - 6e^x \times e^x}{(e^x + 2)^2} = \frac{12e^x}{(e^x + 2)^2} > 0$. **Conclusion** : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $N(0) = f(0) = \frac{6}{3} = 2$: le service compte 2 millions d'abonnés au lancement. N est croissante : le nombre d'abonnés augmente sans cesse. Comme $N(t) < 6$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = 6$, le nombre d'abonnés se rapproche de 6 millions sans jamais l'atteindre : le marché se sature.
- a) `from math import exp`

```
def N(t):
    return 6 / (1 + 2 * exp(-t))
```

```

n = 0
while N(n) < 5.9:
    n = n + 1
print(n)

```

$$\text{b) } N(t) \geq 5,9 \iff 6 - N(t) \leq 0,1 \iff \frac{12}{e^t + 2} \leq 0,1 \iff e^t + 2 \geq 120 \iff e^t \geq 118.$$

Comme $e^4 \approx 54,6 < 118$ et $e^5 \approx 148,4 > 118$, on a $N(4) < 5,9$ et $N(5) \geq 5,9$. **Conclusion** : le programme affiche 5 (plus petit entier n tel que $N(n) \geq 5,9$, N étant croissante).

S3.

1. $(x+2)^2 - 3 = x^2 + 4x + 4 - 3 = x^2 + 4x + 1$. Ainsi $x^2 + 4x + 1 \geq 0 \iff (x+2)^2 \geq 3 \iff |x+2| \geq \sqrt{3} \iff x \leq -2 - \sqrt{3}$ ou $x \geq -2 + \sqrt{3}$. Donc f est définie sur D .
2. Pour $x \neq 0$: $x^2 + 4x + 1 = x^2 \left(1 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$. Le facteur entre parenthèses tend vers 1 et $x^2 \rightarrow +\infty$ en $\pm\infty$; par produit $x^2 + 4x + 1 \rightarrow +\infty$. Par composition avec $\sqrt{\cdot} : \lim_{x \rightarrow +\infty} f = \lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty$.
3. Soit $x \geq -2 + \sqrt{3}$. Alors $x+2 > 0$ et $f(x) \geq 0$, donc $f(x) + x + 2 > 0$. On multiplie par la quantité conjuguée :

$$f(x) - (x+2) = \frac{f(x)^2 - (x+2)^2}{f(x) + x + 2} = \frac{x^2 + 4x + 1 - (x^2 + 4x + 4)}{f(x) + x + 2} = \frac{-3}{f(x) + x + 2}.$$

Quand $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow +\infty$ et $x+2 \rightarrow +\infty$, donc le dénominateur tend vers $+\infty$ et, par quotient, $f(x) - (x+2) \rightarrow 0$. **Conclusion** : la droite $d_1 : y = x + 2$ est asymptote oblique en $+\infty$. Comme $\frac{-3}{f(x) + x + 2} < 0$, $\mathcal{C}$ est en dessous de d_1 (sur $[-2 + \sqrt{3}; +\infty[$).

4. Soit $x \leq -2 - \sqrt{3}$. Alors $-x - 2 > 0$ et $f(x) \geq 0$, donc $f(x) - x - 2 > 0$. Comme

$$(f(x) + x + 2)(f(x) - x - 2) = f(x)^2 - (x+2)^2 = -3,$$

on obtient

$$f(x) - (-x - 2) = f(x) + x + 2 = \frac{-3}{f(x) - x - 2}.$$

Quand $x \rightarrow -\infty$, $f(x) \rightarrow +\infty$ et $-x - 2 \rightarrow +\infty$, donc le dénominateur tend vers $+\infty$ et $f(x) - (-x - 2) \rightarrow 0$. **Conclusion** : la droite $d_2 : y = -x - 2$ est asymptote oblique en $-\infty$; $\mathcal{C}$ est en dessous de d_2 .

5. Pour $x \in D$, $-4 - x \in D$ (car $|(-4 - x) + 2| = |x + 2|$) et $f(-4 - x) = \sqrt{(-2 - x)^2 - 3} = \sqrt{(x+2)^2 - 3} = f(x)$. Donc $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à la droite $x = -2$. La symétrie échange $+\infty$ et $-\infty$ et transforme d_1 en d_2 (image de $y = x + 2 : y = (-4 - x) + 2 = -x - 2$) : la question 4 se déduit de la question 3.

S4.

1. Pour tout $t \geq 0$, $-1 \leq \cos(2t) \leq 1$ et $5e^{-t} > 0$, donc $-5e^{-t} \leq d(t) \leq 5e^{-t}$. Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0$, les deux bornes tendent vers 0. D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(t) = 0$.

2. `from math import exp`

```

n = 0
while 5 * exp(-n) >= 1e-3:
    n = n + 1
print(n)

```

Calcul : $5e^{-n} < 10^{-3} \iff e^n > 5000$. Comme $e^8 \approx 2981 < 5000 < e^9 \approx 8103$, le plus petit entier convenable est $n = 9$: le programme affiche 9.

3. Pour tout $t \geq 9$, $e^{-t} \leq e^{-9}$ (la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est décroissante), donc $|d(t)| \leq 5e^{-t} \leq 5e^{-9} < 10^{-3}$. **Conclusion** : à partir de $t = 9$ s, l'écart est inférieur à 10^{-3} cm en valeur absolue.
4. Pour $x \geq 1$, $\sin x \geq -1$ donc $2x + \sin x \geq 2x - 1 \geq 1 > 0$: le dénominateur ne s'annule pas.

5. Pour $x \geq 1$, on divise numérateur et dénominateur par $x > 0$: $g(x) = \frac{1 + \frac{\cos x}{x}}{2 + \frac{\sin x}{x}}$. Pour $x > 0$, $-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$ et $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$; par le théorème des gendarmes, $\frac{\cos x}{x} \rightarrow 0$ et $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 0$. Par somme, le numérateur tend vers 1 et le dénominateur vers 2; par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{1}{2}$.

S5.

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = ae^{-x} - (ax + b)e^{-x} = (a - b - ax)e^{-x}$.
- $A \in \mathcal{C}$ donne $f(0) = b = 3$. La tangente horizontale en 2 donne $f'(2) = 0$, soit $(a - b - 2a)e^{-2} = (-a - b)e^{-2} = 0$, donc $a = -b = -3$. **Conclusion** : $a = -3$, $b = 3$ et $f(x) = (3 - 3x)e^{-x} = 3(1 - x)e^{-x}$.
- En $+\infty$. $f(x) = 3e^{-x} - 3xe^{-x}$. On a $e^{-x} \rightarrow 0$ et, par croissances comparées, $xe^{-x} \rightarrow 0$. Par somme, $f(x) \rightarrow 0$. En $-\infty$. $3(1 - x) \rightarrow +\infty$ et $e^{-x} \rightarrow +\infty$; par produit, $f(x) \rightarrow +\infty$. **Conclusion** : l'axe des abscisses ($y = 0$) est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
- Avec $a = -3$ et $b = 3$: $f'(x) = (-3 - 3 + 3x)e^{-x} = 3(x - 2)e^{-x}$, du signe de $x - 2$ car $e^{-x} > 0$. De plus $f(2) = 3(1 - 2)e^{-2} = -3e^{-2}$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$+\infty$	$-3e^{-2}$	0

5. $f(x) - 0 = 3(1 - x)e^{-x}$ est du signe de $1 - x$. **Conclusion** : $\mathcal{C}$ est au-dessus de l'asymptote pour $x < 1$, en dessous pour $x > 1$, et la coupe au point $(1; 0)$.

S6.

- Quand $q \rightarrow 0^+$, $2q + 3 \rightarrow 3$ et $\frac{50}{q} \rightarrow +\infty$; par somme $\lim_{q \rightarrow 0^+} C(q) = +\infty$. Quand $q \rightarrow +\infty$, $2q + 3 \rightarrow +\infty$ et $\frac{50}{q} \rightarrow 0$; par somme $\lim_{q \rightarrow +\infty} C(q) = +\infty$. Interprétation : pour une très faible production, les frais fixes sont répartis sur très peu d'objets et le coût moyen devient très grand.
- $C(q) - (2q + 3) = \frac{50}{q}$, qui tend vers 0 en $+\infty$: la droite d est asymptote oblique. Comme $\frac{50}{q} > 0$, la courbe est au-dessus de d .
- $C'(q) = 2 - \frac{50}{q^2} = \frac{2q^2 - 50}{q^2} = \frac{2(q - 5)(q + 5)}{q^2}$. Pour $q > 0$, $2(q + 5) > 0$ et $q^2 > 0$: $C'(q)$ est du signe de $q - 5$. Ainsi $C(5) = 10 + 3 + 10 = 23$.

q	0	5	$+\infty$
$C'(q)$		0	
$C(q)$	$+\infty$	23	$+\infty$

4. **Conclusion** : le coût moyen est minimal pour $q = 5$, soit 500 objets, et vaut 23 euros.
5. Pour $q > 0$: $C(q) \leq 25 \iff 2q^2 + 3q + 50 \leq 25q \iff 2q^2 - 22q + 50 \leq 0 \iff q^2 - 11q + 25 \leq 0$. Le discriminant vaut $121 - 100 = 21 > 0$; les racines sont $q_1 = \frac{11 - \sqrt{21}}{2} \approx 3,21$ et $q_2 = \frac{11 + \sqrt{21}}{2} \approx 7,79$, toutes deux strictement positives. **Conclusion** : $C(q) \leq 25 \iff q \in [q_1; q_2]$, soit une production d'environ 321 à 779 objets.

S7.

1. Par définition du nombre dérivé en 0 : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - e^0}{h} = e^0 = 1$.
2. Pour $x \neq 0$: $\frac{e^{2x} - 1}{x} = 2 \times \frac{e^{2x} - 1}{2x}$. Quand $x \rightarrow 0$, $h = 2x \rightarrow 0$ avec $h \neq 0$, donc $\frac{e^h - 1}{h} \rightarrow 1$ (composition). Par produit, **la limite vaut 2**.
3. Pour $x \neq 0$, $e^x \neq 1$ et $\frac{e^{3x} - 1}{e^x - 1} = \frac{e^{3x} - 1}{\frac{e^x - 1}{x}}$. Comme à la question 2, $\frac{e^{3x} - 1}{x} = 3 \times \frac{e^{3x} - 1}{3x} \rightarrow 3$, et $\frac{e^x - 1}{x} \rightarrow 1 \neq 0$. Par quotient, **la limite vaut 3**.
4. Quand $x \rightarrow +\infty$, $X = \frac{1}{x} \rightarrow 0^+$ et $x(e^{1/x} - 1) = \frac{e^X - 1}{X} \rightarrow 1$. **La limite vaut 1**.
5. Pour $x \neq 0$: $\frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \frac{1}{2} \times \frac{e^x - 1}{x} + \frac{1}{2} \times \frac{e^{-x} - 1}{-x}$. Le premier quotient tend vers 1 ; le second aussi (avec $h = -x \rightarrow 0$). Par somme, **la limite vaut** $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

S8.

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = 2$: asymptote horizontale $y = 2$ (en $-\infty$). $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = -3$: asymptote horizontale $y = -3$ (en $+\infty$). $\lim_{x \rightarrow 1^-} f = \lim_{x \rightarrow 1^+} f = +\infty$: asymptote verticale $x = 1$.
2. a) $f(x) \rightarrow 2$ en $-\infty$ et $e^y \rightarrow e^2$ quand $y \rightarrow 2$: $\lim_{-\infty} g = e^2$. En 1^- et en 1^+ , $f(x) \rightarrow +\infty$ et $e^y \rightarrow +\infty$: $\lim_{x \rightarrow 1^-} g = \lim_{x \rightarrow 1^+} g = +\infty$. En $+\infty$, $f(x) \rightarrow -3$ donc $\lim_{+\infty} g = e^{-3}$ (composition dans chaque cas).
b) Sur $]-\infty; 1[$, f est strictement croissante de limite 2 en $-\infty$, donc $f(x) > 2$ et $f(x) - 2 > 0$. En $-\infty$, $f(x) - 2 \rightarrow 0^+$ donc, par quotient, $\lim_{x \rightarrow -\infty} h = +\infty$. En 1^- , $f(x) - 2 \rightarrow +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} h = 0$.
c) En 0^+ , $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ et $f(y) \rightarrow -3$ quand $y \rightarrow +\infty$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} k = -3$. En 0^- , $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$ et $f(y) \rightarrow 2$ quand $y \rightarrow -\infty$: $\lim_{x \rightarrow 0^-} k = 2$ (composition).
3. On a $\frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ donc $u_n \rightarrow 1$, avec $u_n > 1$ pour tout n : $u_n \rightarrow 1^+$. Comme $\lim_{x \rightarrow 1^+} f = +\infty$, $f(u_n) \rightarrow +\infty$. De même $v_n = n \rightarrow +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = -3$, donc $f(v_n) \rightarrow -3$.

S9.

1. Pour $x \neq 0$: $f_m(x) = \frac{m + \frac{4}{x}}{1 - \frac{2}{x}} \rightarrow m$ en $\pm\infty$ (quotient, dénominateur de limite 1). **Conclusion** : la droite $y = m$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_m$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. $f_m(x) - m = \frac{mx + 4 - m(x - 2)}{x - 2} = \frac{2m + 4}{x - 2}$.
3. Pour $x \neq 2$: $f_{-2}(x) = \frac{-2x + 4}{x - 2} = \frac{-2(x - 2)}{x - 2} = -2$. La limite en 2 est -2 (finie) : pas d'asymptote verticale. $\mathcal{C}_{-2}$ est la droite d'équation $y = -2$ privée du point $(2; -2)$.
4. Quand $x \rightarrow 2$, $mx + 4 \rightarrow 2m + 4 \neq 0$, du signe de $m + 2$. Si $m > -2$: $2m + 4 > 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 2^+} f_m = +\infty$ (dénominateur $\rightarrow 0^+$) et $\lim_{x \rightarrow 2^-} f_m = -\infty$. Si $m < -2$: $2m + 4 < 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 2^+} f_m = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} f_m = +\infty$. **Conclusion** : dans les deux cas, la droite $x = 2$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_m$.
5. $f_m(x) - m = \frac{2(m + 2)}{x - 2}$ ne s'annule jamais pour $m \neq -2$: $\mathcal{C}_m$ ne coupe pas son asymptote horizontale. Si $m > -2$, $\mathcal{C}_m$ est au-dessus de l'asymptote pour $x > 2$ et en dessous pour $x < 2$. Si $m < -2$, c'est l'inverse : en dessous pour $x > 2$ et au-dessus pour $x < 2$.

S10.

1. a) $\frac{f_1(x)}{x} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$: branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

- b) $\frac{f_2(x)}{x} = x \rightarrow +\infty$: branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
- c) $\frac{f_3(x)}{x} = \frac{e^x}{x} \rightarrow +\infty$ (croissances comparées) : branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
- d) $\frac{f_4(x)}{x} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 1$, et $f_4(x) - x = \sqrt{x} \rightarrow +\infty$: la droite $y = x$ n'est pas asymptote ; branche parabolique de direction la droite $y = x$.
- e) $\frac{f_5(x)}{x} = 2 - \frac{1}{x} + \frac{e^{-x}}{x} \rightarrow 2$, et $f_5(x) - 2x = -1 + e^{-x} \rightarrow -1$: la droite d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote oblique.
2. On écrit $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) = f(x) - (ax + b) \rightarrow 0$. Pour $x > 0$: $\frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{\varepsilon(x)}{x} \rightarrow a + 0 + 0 = a$.
3. Non. Pour f_4 , $\frac{f_4(x)}{x} \rightarrow 1$ mais la droite $y = x$ n'est pas asymptote, car $f_4(x) - x = \sqrt{x} \rightarrow +\infty$.
- Conclusion :** la limite de $\frac{f(x)}{x}$ est une condition nécessaire, non suffisante, pour l'existence d'une asymptote oblique.