

Limites de fonctions**Fiche Défi**

Nom : _____

Date : _____

Exercice D1 : Démonstrations : l'exponentielle à l'infini

1. Soit $\varphi(x) = e^x - x - 1$. Étudier les variations de φ et en déduire que $e^x \geq x + 1$ pour tout réel x .
2. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$, puis $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$.
3. Soit $\psi(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$. Montrer que ψ est croissante sur $[0; +\infty[$, puis que $e^x \geq \frac{x^2}{2}$ pour tout $x \geq 0$.
4. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$, puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$.
5. Soit n un entier naturel non nul. Pour $x > 0$, vérifier que $\frac{e^x}{x^n} = \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{x/n}}{x/n} \right)^n$, puis en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n}$.

Exercice D2 : Problème complet : un quotient d'exponentielles**Partie A.** Soit $g(x) = e^x - x$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Étudier les variations de g et montrer que $g(x) \geq 1$ pour tout réel x .

Partie B. On pose $f(x) = \frac{e^x}{e^x - x}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe.

2. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
4. Montrer que, pour tout réel x , $f(x) = \frac{1}{1 - x e^{-x}}$, puis déterminer la limite de f en $+\infty$.
5. En déduire que $\mathcal{C}$ admet deux asymptotes horizontales dont on donnera les équations.
6. Montrer que $f(x) - 1 = \frac{x}{e^x - x}$ et étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à la droite d'équation $y = 1$.
7. Montrer que $f'(x) = \frac{e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$ et dresser le tableau de variations complet de f .

Partie C. On considère le programme suivant.

```
from math import exp
```

```
def f(x):
    return exp(x) / (exp(x) - x)
```

```
n = 1
while f(n) - 1 >= 0.01:
    n = n + 1
print(n)
```

8. Justifier que ce programme se termine, puis déterminer la valeur affichée. On donne $e^6 \approx 403,4$ et $e^7 \approx 1096,6$.
9. Interpréter ce résultat pour tout réel $x \geq n$.

Exercice D3 : Racines carrées et signe de x Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} + x$.

1. Montrer que f est définie sur $D =]-\infty; -2] \cup [0; +\infty[$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Montrer que, pour $x \leq -2$, $f(x) = \frac{-2}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1}$. En déduire la limite de f en $-\infty$ et une asymptote

à la courbe de f .

4. Soit $g(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x}$ sur $D \setminus \{0\}$. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$. Pourquoi ne sont-elles pas égales ?
5. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + 2x} - (x + 1)] = 0$. Interpréter graphiquement : la droite d'équation $y = x + 1$ est alors dite *asymptote oblique* à la courbe de $x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x}$ en $+\infty$.

Exercice D4 : Quand il n'y a pas de limite (pour aller plus loin, hors programme)

On rappelle que, si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (avec ℓ fini ou infini) et si $u_n \rightarrow +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \ell$; de même, si $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \ell$ et si $u_n \rightarrow 0$ avec $u_n > 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \ell$. On rappelle aussi que la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée cosinus.

1. En considérant les suites de termes généraux $u_n = 2n\pi$ et $v_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, montrer que la fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$.
2. Montrer que la fonction $s : x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0^+ (on adaptera la méthode précédente).
3. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$. Quelle différence avec la question 2 ?
4. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$ (on pourra poser $X = \frac{1}{x}$ et reconnaître un nombre dérivé).

Exercice D5 : Modélisation : concentration d'un médicament

Après injection, la concentration d'un médicament dans le sang, en mg/L, est modélisée à l'instant $t \geq 0$ (en heures) par $C(t) = 8te^{-t/2}$.

1. Montrer que $C(t) = 16Xe^{-X}$ avec $X = \frac{t}{2}$. En déduire $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t)$ et interpréter.
2. Calculer $C'(t)$, dresser le tableau de variations de C sur $[0; +\infty[$ et donner la concentration maximale (valeur exacte, puis arrondie au centième) et l'instant où elle est atteinte.
3. Montrer que la concentration ne s'annule qu'à l'instant $t = 0$.
4. Le médicament est considéré comme éliminé lorsque la concentration est inférieure à 0,1 mg/L.
 - a) Écrire un programme Python qui détermine le plus petit entier n tel que $C(n) < 0,1$, en partant de $n = 2$.
 - b) Cette valeur est 15. Justifier que, pour tout réel $t \geq 15$, la concentration est inférieure à 0,1 mg/L.

Exercice D6 : Retrouver une fonction à partir de ses asymptotes

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ par $f(x) = \frac{3x^2 + bx + c}{x^2 - 4}$, où b et c sont deux réels. On note $\mathcal{C}$ sa courbe. On sait que :

- la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point $A(0; 2)$;
 - la courbe $\mathcal{C}$ admet *exactement une* asymptote verticale.
1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
 2. Déterminer c .
 3. On note $N(x) = 3x^2 + bx + c$. Justifier que, si $N(2) \neq 0$, alors $\mathcal{C}$ admet la droite $x = 2$ pour asymptote verticale. Énoncer le résultat analogue en -2 .
 4. Montrer qu'il existe exactement deux couples $(b; c)$ possibles. Pour chacun, simplifier $f(x)$ et donner l'équation de l'asymptote verticale.
 5. Pour chacune des deux fonctions obtenues, étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à son asymptote horizontale.

Exercice D7 : QCM de type bac

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Indiquer cette réponse et la justifier (une réponse

sans justification ne rapporte aucun point).

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{3x^2 + 2}$ vaut : **A.** 0 **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $-\frac{5}{2}$ **D.** $+\infty$
2. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - 2}{x^2 + x}$ vaut : **A.** $-\infty$ **B.** $+\infty$ **C.** -2 **D.** 0
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x$ vaut : **A.** $-\infty$ **B.** $+\infty$ **C.** 1 **D.** 0
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \cos x}{x}$ vaut : **A.** 3 **B.** 4 **C.** $+\infty$ **D.** la limite n'existe pas
5. $\lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{1-x}}$ vaut : **A.** $+\infty$ **B.** e **C.** 1 **D.** 0