

Corrigé : Limites de fonctions

Fiche Défi

D1.

1. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(x) = e^x - 1$. Comme l'exponentielle est strictement croissante et $e^0 = 1$, $\varphi'(x) < 0$ pour $x < 0$ et $\varphi'(x) > 0$ pour $x > 0$. Ainsi φ est décroissante sur $] -\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$: son minimum est $\varphi(0) = 1 - 0 - 1 = 0$. Donc $\varphi(x) \geq 0$. **Conclusion** : $e^x \geq x + 1$ pour tout réel x .
2. Pour tout x , $e^x \geq x + 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = +\infty$. Par comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$. Ensuite $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$; quand $x \rightarrow -\infty$, $-x \rightarrow +\infty$ donc $e^{-x} \rightarrow +\infty$ (composition) et, par quotient, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.
3. $\psi'(x) = e^x - x \geq (x + 1) - x = 1 > 0$ d'après la question 1, pour tout réel x . Donc ψ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[0 ; +\infty[$, et $\psi(0) = 1$. Pour $x \geq 0$: $\psi(x) \geq \psi(0) = 1 > 0$, soit $e^x > \frac{x^2}{2}$, a fortiori $e^x \geq \frac{x^2}{2}$.
4. Pour $x > 0$, on divise par x : $\frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{2}$. Comme $\frac{x}{2} \rightarrow +\infty$, par comparaison $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. Pour $x > 0$, $xe^{-x} = \frac{x}{e^x} = \frac{1}{e^{x/x}}$ avec $\frac{e^x}{x} \rightarrow +\infty$: par quotient $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$. Enfin, avec $X = -x$, $xe^x = -Xe^{-X}$ et $X \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow -\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$.
5. Pour $x > 0$: $\left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{x/n}}{x/n}\right)^n = \left(\frac{e^{x/n}}{x/n}\right)^n = \frac{e^x}{x^n}$ car $(e^{x/n})^n = e^x$. Posons $X = \frac{x}{n}$: $X \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$, donc $\frac{e^X}{X} \rightarrow +\infty$ et $\frac{1}{n} \times \frac{e^X}{X} \rightarrow +\infty$ ($\frac{1}{n} > 0$). Une puissance n -ième (entier $n \geq 1$) d'une quantité qui tend vers $+\infty$ tend vers $+\infty$. **Conclusion** : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$.

D2. Partie A.

1. $g'(x) = e^x - 1$, négatif sur $] -\infty ; 0]$ et positif sur $[0 ; +\infty[$. Donc g admet un minimum en 0 valant $g(0) = 1$. **Conclusion** : $g(x) \geq 1$ pour tout réel x .

Partie B.

2. Le dénominateur $e^x - x = g(x) \geq 1$ ne s'annule jamais : f est définie sur $\mathbb{R}$.
3. Quand $x \rightarrow -\infty$: $e^x \rightarrow 0$ et $-x \rightarrow +\infty$, donc par somme $g(x) = e^x - x \rightarrow +\infty$. Par quotient, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = 0$.
4. On divise numérateur et dénominateur par $e^x > 0$: $f(x) = \frac{1}{1 - xe^{-x}}$. Par croissances comparées, $xe^{-x} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$, donc le dénominateur tend vers 1 (non nul). Par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 1$.
5. **Conclusion** : la droite $y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $-\infty$ et la droite $y = 1$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
6. $f(x) - 1 = \frac{e^x - (e^x - x)}{e^x - x} = \frac{x}{e^x - x}$. Comme $e^x - x > 0$, $f(x) - 1$ est du signe de x . **Conclusion** : $\mathcal{C}$ est au-dessus de la droite $y = 1$ pour $x > 0$, en dessous pour $x < 0$, et la coupe au seul point $(0 ; 1)$.
7. $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = e^x - x$, $v > 0$. Alors $f'(x) = \frac{e^x(e^x - x) - e^x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(1 - x)}{(e^x - x)^2}$. $f'(x)$ est du signe de $1 - x$. De plus $f(1) = \frac{e}{e - 1} \approx 1,58$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$			

Partie C.

8. Pour $x > 0$, $f(x) - 1 = \frac{x}{e^x - x} > 0$, et $f(x) \rightarrow 1$ en $+\infty$: la quantité $f(n) - 1$ tend vers 0, donc elle finit par être inférieure à 0,01 et la boucle s'arrête. Pour $n = 6$: $f(6) - 1 = \frac{6}{e^6 - 6} \approx \frac{6}{397,4} \approx 0,0151 \geq 0,01$. Pour $n = 7$: $f(7) - 1 = \frac{7}{e^7 - 7} \approx \frac{7}{1089,6} \approx 0,0064 < 0,01$. Comme f est décroissante sur $[1; +\infty[$, $f(n) - 1$ décroît pour $n \geq 1$: les entiers 1 à 6 ne conviennent pas (pour $n \leq 6$, $f(n) - 1 \geq f(6) - 1 > 0,01$). **Le programme affiche 7.**
9. f étant décroissante sur $[1; +\infty[$, pour tout réel $x \geq 7$: $0 < f(x) - 1 \leq f(7) - 1 < 0,01$. **Conclusion :** pour $x \geq 7$, $f(x)$ est à moins de 0,01 de 1, ce qui illustre $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

D3.

1. f est définie si et seulement si $x^2 + 2x = x(x + 2) \geq 0$. Le trinôme $x(x + 2)$, de racines -2 et 0 et de coefficient dominant positif, est positif ou nul à l'extérieur des racines. **Conclusion :** $D =]-\infty; -2] \cup [0; +\infty[$.
2. Pour $x \geq 0$: $x^2 + 2x \rightarrow +\infty$ donc $\sqrt{x^2 + 2x} \rightarrow +\infty$ (composition) et $x \rightarrow +\infty$. Par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$.
3. Soit $x \leq -2$. On a « $+\infty - \infty$ » en $-\infty$: on utilise la quantité conjuguée. Comme $\sqrt{x^2 + 2x} \geq 0$ et $-x > 0$, $\sqrt{x^2 + 2x} - x > 0$ et $f(x) = \frac{(x^2 + 2x) - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} - x} = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} - x}$. On divise numérateur et dénominateur par $-x > 0$. Comme $x < 0$, $\sqrt{x^2} = |x| = -x$, donc $\frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{-x} = \sqrt{\frac{x^2 + 2x}{x^2}} = \sqrt{1 + \frac{2}{x}}$. D'où $f(x) = \frac{-2}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1}$. Quand $x \rightarrow -\infty$, $1 + \frac{2}{x} \rightarrow 1$, donc $\sqrt{1 + \frac{2}{x}} \rightarrow 1$ (composition) et le dénominateur tend vers 2. Par quotient, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -1$. **Conclusion :** la droite d'équation $y = -1$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $-\infty$.
4. En $+\infty$. Pour $x > 0$, $|x| = x$ et $g(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 2x}{x^2}} = \sqrt{1 + \frac{2}{x}} \rightarrow 1$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g = 1$. En $-\infty$. Pour $x \leq -2$, $x = -|x|$, donc $g(x) = -\frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{|x|} = -\sqrt{1 + \frac{2}{x}} \rightarrow -1$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g = -1$. Les limites diffèrent car $\sqrt{x^2} = |x|$ vaut x en $+\infty$ et $-x$ en $-\infty$: le signe de x au dénominateur change le signe du quotient.
5. Pour $x \geq 0$, $\sqrt{x^2 + 2x} + x + 1 > 0$ et $\sqrt{x^2 + 2x} - (x + 1) = \frac{(x^2 + 2x) - (x + 1)^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x + 1} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 2x} + x + 1}$. Le dénominateur tend vers $+\infty$, donc par quotient la limite vaut 0. **Conclusion :** la droite $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe de $x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x}$ en $+\infty$ (la courbe est en dessous).

D4.

1. Supposons que $\sin$ ait une limite ℓ en $+\infty$. Les suites (u_n) et (v_n) tendent vers $+\infty$, donc $\sin(u_n) \rightarrow \ell$ et $\sin(v_n) \rightarrow \ell$. Or $\sin(u_n) = \sin(2n\pi) = 0$ pour tout n , donc $\ell = 0$, et $\sin(v_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$ pour tout n , donc $\ell = 1$. Contradiction ($0 \neq 1$). **Conclusion :** $\sin$ n'a pas de limite en $+\infty$.
2. Pour $n \geq 1$, soient $a_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$. Ces suites tendent vers 0 avec $a_n > 0$ et $b_n > 0$.

Alors $s(a_n) = \sin(2n\pi) = 0$ et $s(b_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$. Si s avait une limite ℓ en 0^+ , on aurait $\ell = 0$ et $\ell = 1$. **Conclusion** : s n'a pas de limite en 0^+ .

3. Pour $x \neq 0$, $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ donc $\left|x \sin \frac{1}{x}\right| \leq |x|$, soit $-|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|$. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$, le théorème des gendarmes donne $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$. Ici le facteur x « écrase » le sinus borné et force la limite ; en question 2 rien ne compense les oscillations de $\sin \frac{1}{x}$ entre -1 et 1 .
4. Pour $x > 0$, avec $X = \frac{1}{x}$: $x \sin \frac{1}{x} = \frac{\sin X}{X} = \frac{\sin X - \sin 0}{X - 0}$. Quand $x \rightarrow +\infty$, $X \rightarrow 0^+$, et ce taux d'accroissement tend vers $\sin'(0) = \cos 0 = 1$ (sinus dérivable en 0). Par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$.

D5.

1. Avec $X = \frac{t}{2}$: $t = 2X$ et $C(t) = 8 \times 2Xe^{-X} = 16Xe^{-X}$. Quand $t \rightarrow +\infty$, $X \rightarrow +\infty$ et $Xe^{-X} \rightarrow 0$ (croissances comparées). Par produit, $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = 0$. Interprétation : à long terme, le médicament est éliminé et sa concentration tend vers 0.
2. $C'(t) = 8e^{-t/2} + 8t \times \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-t/2} = (8 - 4t)e^{-t/2} = 4(2 - t)e^{-t/2}$, du signe de $2 - t$. On a $C(0) = 0$ et $C(2) = 16e^{-1}$.

t	0	2	$+\infty$
$C'(t)$	+	0	-
$C(t)$	0	$16e^{-1}$	0

Conclusion : la concentration maximale est $\frac{16}{e} \approx 5,89$ mg/L, atteinte à l'instant $t = 2$ h.

3. Pour $t > 0$, $8t > 0$ et $e^{-t/2} > 0$ donc $C(t) > 0$; et $C(0) = 0$. **Conclusion** : $C(t) = 0$ si et seulement si $t = 0$. La concentration tend vers 0 sans jamais l'atteindre.
4. a) `from math import exp`

```
def C(t):
    return 8 * t * exp(-t / 2)
```

```
n = 2
while C(n) >= 0.1:
    n = n + 1
print(n)
```

- b) Sur $[2; +\infty[$, C est décroissante. Comme $C(15) = 120e^{-7,5} \approx 0,066 < 0,1$ (et $C(14) = 112e^{-7} \approx 0,102 \geq 0,1$), pour tout réel $t \geq 15$ on a $C(t) \leq C(15) < 0,1$. **Conclusion** : à partir de la quinzième heure, la concentration est inférieure à 0,1 mg/L et le programme affiche 15.

D6.

1. Pour $x \neq 0$: $f(x) = \frac{3 + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} \rightarrow 3$ en $\pm\infty$ (quotient, dénominateur de limite 1). **Conclusion** : la droite $y = 3$ est asymptote horizontale, quels que soient b et c .
2. $A \in \mathcal{C}$ donne $f(0) = \frac{c}{-4} = 2$, donc $c = -8$.
3. Si $N(2) \neq 0$: quand $x \rightarrow 2$, le numérateur tend vers $N(2) \neq 0$. Le dénominateur $(x - 2)(x + 2)$ tend vers 0 (car $x + 2 \rightarrow 4$ et $x - 2 \rightarrow 0$), avec un signe constant de chaque côté de 2. Par quotient, $|f(x)| \rightarrow +\infty$ (limite $\pm\infty$ à droite et à gauche) : la droite $x = 2$ est asymptote verticale. De même,

si $N(-2) \neq 0$, la droite $x = -2$ est asymptote verticale.

4. Avec $c = -8$: $N(2) = 12 + 2b - 8 = 2b + 4$ et $N(-2) = 12 - 2b - 8 = 4 - 2b$. Les deux ne peuvent pas s'annuler simultanément ($b = -2$ et $b = 2$). Si aucun ne s'annule, il y a deux asymptotes verticales (question 3), ce qui est exclu. Donc exactement un des deux s'annule, et alors l'autre est non nul : il y a exactement une asymptote verticale, située à l'autre abscisse. Cas $b = -2$ ($N(2) = 0$) ou $b = 2$ ($N(-2) = 0$). Cas $b = -2$, $c = -8$. $N(x) = 3x^2 - 2x - 8 = (x - 2)(3x + 4)$ (développement : $3x^2 + 4x - 6x - 8$). Pour $x \neq \pm 2$: $f(x) = \frac{3x + 4}{x + 2}$. Asymptote verticale : $x = -2$ (en 2, la limite vaut $\frac{10}{4} = \frac{5}{2}$, il n'y a pas d'asymptote). Cas $b = 2$, $c = -8$. $N(x) = 3x^2 + 2x - 8 = (x + 2)(3x - 4)$ (développement : $3x^2 - 4x + 6x - 8$). Pour $x \neq \pm 2$: $f(x) = \frac{3x - 4}{x - 2}$. Asymptote verticale : $x = 2$ (en -2 , la limite vaut $\frac{-10}{-4} = \frac{5}{2}$). **Conclusion** : les deux couples possibles sont $(b; c) = (-2; -8)$ et $(2; -8)$.
5. Cas $b = -2$. $f(x) - 3 = \frac{3x + 4 - 3(x + 2)}{x + 2} = \frac{-2}{x + 2}$: $\mathcal{C}$ est au-dessus de $y = 3$ pour $x < -2$ et en dessous pour $x > -2$ ($x \neq -2$). Cas $b = 2$. $f(x) - 3 = \frac{3x - 4 - 3(x - 2)}{x - 2} = \frac{2}{x - 2}$: $\mathcal{C}$ est au-dessus de $y = 3$ pour $x > 2$ et en dessous pour $x < 2$ ($x \neq 2$). Dans les deux cas, $\mathcal{C}$ ne coupe pas l'asymptote horizontale.

D7.

1. **Réponse B.** Pour $x \neq 0$: $\frac{x^2 - 5x + 1}{3x^2 + 2} = \frac{1 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{2}{x^2}} \rightarrow \frac{1}{3}$ par quotient. (A, C, D sont fausses : seul le rapport des termes de plus haut degré compte.)
2. **Réponse B.** Quand $x \rightarrow 0^-$, le numérateur tend vers -2 . Pour le dénominateur, $x^2 + x = x(x + 1)$ avec $x < 0$ et $x + 1 \rightarrow 1 > 0$: il tend vers 0^- . Par quotient de deux quantités négatives, la limite est $+\infty$.
3. **Réponse D.** Avec $X = -x$: $x^2 e^x = X^2 e^{-X}$, avec $X \rightarrow +\infty$. Par croissances comparées, $X^2 e^{-X} \rightarrow 0$. La limite est 0 (forme indéterminée « $\infty \times 0$ » levée par les croissances comparées, et non $\pm\infty$ ni 1).
4. **Réponse A.** Pour $x > 0$: $\frac{3x + \cos x}{x} = 3 + \frac{\cos x}{x}$. Comme $-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$, le théorème des gendarmes donne $\frac{\cos x}{x} \rightarrow 0$, donc la limite vaut 3.
5. **Réponse D.** Quand $x \rightarrow 1^+$, $1 - x \rightarrow 0^-$, donc $\frac{1}{1 - x} \rightarrow -\infty$. Par composition avec $\lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$, la limite vaut 0.