

Limites de fonctions

Fiche Bases

Nom : _____

Date : _____

Exercice B1 : Limites usuelles et opérations

Déterminer les limites suivantes, en citant les règles utilisées (somme, produit, quotient).

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 - \frac{2}{x^2} \right)$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 4x)$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - 3\sqrt{x})$

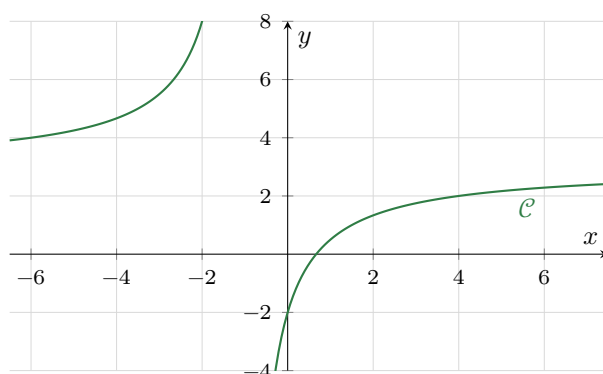
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4 - 3e^x)$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(3 - \frac{1}{x} \right)$

6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} - 3)$

Exercice B2 : Lecture graphique

On donne la courbe $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.



- Conjecturer, par lecture graphique, les limites de f en $+\infty$, en $-\infty$, en -1 par valeurs supérieures et en -1 par valeurs inférieures.
- En déduire les équations des asymptotes à $\mathcal{C}$.
- On admet que $f(x) = 3 - \frac{5}{x+1}$ pour tout $x \neq -1$. Retrouver par le calcul les quatre limites de la question 1.

Exercice B3 : Polynômes et fractions rationnelles en l'infini

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de chaque fonction, en mettant en facteur le terme de plus haut degré.

1. $f(x) = -2x^3 + x^2 - 1$

2. $g(x) = \frac{4x-1}{2x+3}$

3. $h(x) = \frac{x^2+3}{x^3-x}$

4. $k(x) = \frac{3x^2-x}{x+1}$

Exercice B4 : Dénominateur qui tend vers 0

Déterminer les limites demandées, en justifiant le signe du dénominateur.

1. $f(x) = \frac{2x+3}{x-4}$: limites en 4^+ et en 4^- .

2. $g(x) = \frac{-5}{(x+1)^2}$: limite en -1 .

3. $h(x) = \frac{3-x}{x^2-1}$: limites en 1^+ et en 1^- .

Pour chacune des fonctions f , g et h , indiquer une asymptote verticale à sa courbe.

Exercice B5 : Formes indéterminées « $\frac{0}{0}$ »

Déterminer les limites suivantes en factorisant ou en utilisant la quantité conjuguée.

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$
2. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x + 2}$
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$

Exercice B6 : Limite d'une fonction composée

Déterminer les limites suivantes en détaillant les deux étapes de la composition.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4 + \frac{1}{x}}$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2 - x}$ (on pourra écrire $x^2 - x = x(x-1)$)
4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-1/x}$
5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1/x}$
6. $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-1/n}$ (limite de suite)

Exercice B7 : Comparaison et théorème des gendarmes

1. Justifier que, pour tout réel x , $x + \sin x \geq x - 1$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin x)$.
2. Montrer que, pour tout $x > 0$, $-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x}$.
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + 3 \sin x)$. On choisira entre minorer et majorer, et on justifiera ce choix.

Exercice B8 : Croissances comparées

Déterminer les limites suivantes en citant le résultat de croissances comparées utilisé.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$ (poser $X = -x$)
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)$
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1)e^{-x}$
6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + 3x e^{-x})$

Exercice B9 : Vrai ou faux ?

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, puis justifier (démonstration ou contre-exemple).

1. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$, alors la droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à la courbe de f .
2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} = +\infty$.
3. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) = 0$.
4. Si $f(x) > 0$ pour tout réel x et si f a pour limite ℓ en $+\infty$, alors $\ell > 0$.

Exercice B10 : Algorithme de seuil

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$.

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $f(x) - 2 = \frac{-5}{x+3}$.
3. On considère le programme Python ci-dessous.

```
def f(x):
    return (2 * x + 1) / (x + 3)
```

```
n = 0
while abs(f(n) - 2) >= 0.03:
    n = n + 1
print(n)
```

- a) Quelle condition sur n traduit l'inégalité $|f(n) - 2| < 0,03$? La résoudre.
- b) En déduire la valeur affichée par ce programme.
- c) Interpréter ce résultat pour tout réel x supérieur ou égal à cette valeur.