

Corrigé : Limites de fonctions**Fiche Bases****B1.**

- $\frac{2}{x^2} \rightarrow 0$ donc, par somme, $5 - \frac{2}{x^2} \rightarrow 5$. **Conclusion** : la limite vaut 5.
- $x^3 \rightarrow -\infty$ et $4x \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow -\infty$. Par somme, **la limite vaut** $-\infty$.
- $\sqrt{x} \rightarrow +\infty$, donc $-3\sqrt{x} \rightarrow -\infty$ (produit par $-3 < 0$). Par somme avec 2, **la limite vaut** $-\infty$.
- $e^x \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow -\infty$, donc $4 - 3e^x \rightarrow 4$. **La limite vaut** 4.
- $3 - \frac{1}{x} \rightarrow 3$ et $x^2 \rightarrow +\infty$. Par produit ($3 > 0$), **la limite vaut** $+\infty$.
- Quand $x \rightarrow -\infty$, $-x \rightarrow +\infty$ donc $e^{-x} \rightarrow +\infty$. Par somme avec -3 , **la limite vaut** $+\infty$.

B2.

- La courbe se rapproche de la droite horizontale $y = 3$ à droite comme à gauche, et se « colle » à la droite verticale $x = -1$: vers le haut quand $x \rightarrow -1$ avec $x < -1$, vers le bas quand $x \rightarrow -1$ avec $x > -1$. **Conjecture** : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 3$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = 3$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f = +\infty$.
- Conclusion** : la droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale (en $+\infty$ et en $-\infty$) et la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale.
- Quand $x \rightarrow \pm\infty$, $\frac{5}{x+1} \rightarrow 0$, donc par somme $f(x) \rightarrow 3$. Quand $x \rightarrow -1^+$, $x+1 \rightarrow 0^+$ donc $\frac{5}{x+1} \rightarrow +\infty$ et, par produit par -1 puis somme, $f(x) \rightarrow -\infty$. Quand $x \rightarrow -1^-$, $x+1 \rightarrow 0^-$ donc $\frac{5}{x+1} \rightarrow -\infty$ et $f(x) \rightarrow +\infty$. Ces résultats confirment la lecture graphique.

B3.

- Pour $x \neq 0$, $f(x) = x^3 \left(-2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right)$. Le facteur entre parenthèses tend vers -2 en $\pm\infty$. Comme $x^3 \rightarrow +\infty$ en $+\infty$ et $x^3 \rightarrow -\infty$ en $-\infty$, par produit : **Conclusion** : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty$.
- Pour $x \neq 0$: $g(x) = \frac{x(4 - \frac{1}{x})}{x(2 + \frac{3}{x})} = \frac{4 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{3}{x}}$. Le numérateur tend vers 4, le dénominateur vers 2 (non nul). Par quotient, g **tend vers 2 en** $+\infty$ **et en** $-\infty$.
- Pour x assez grand en valeur absolue : $h(x) = \frac{x^2(1 + \frac{3}{x^2})}{x^3(1 - \frac{1}{x^2})} = \frac{1 + \frac{3}{x^2}}{x(1 - \frac{1}{x^2})}$. Le numérateur tend vers 1 et le dénominateur vers $+\infty$ en $+\infty$ (vers $-\infty$ en $-\infty$). Par quotient, h **tend vers 0 en** $+\infty$ **et en** $-\infty$.
- Pour $x \neq 0$: $k(x) = \frac{x^2(3 - \frac{1}{x})}{x(1 + \frac{1}{x})} = x \times \frac{3 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$. Le quotient tend vers 3. Par produit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} k = +\infty$ **et** $\lim_{x \rightarrow -\infty} k = -\infty$.

B4.

- Quand $x \rightarrow 4$, $2x + 3 \rightarrow 11 > 0$. Si $x > 4$, $x - 4 \rightarrow 0^+$; si $x < 4$, $x - 4 \rightarrow 0^-$. Par quotient : $\lim_{x \rightarrow 4^+} f = +\infty$ **et** $\lim_{x \rightarrow 4^-} f = -\infty$. La droite $x = 4$ est asymptote verticale.
- Pour $x \neq -1$, $(x+1)^2 > 0$ et $(x+1)^2 \rightarrow 0$, donc $(x+1)^2 \rightarrow 0^+$ des deux côtés. Le numérateur vaut $-5 < 0$. Par quotient : $\lim_{x \rightarrow -1} g = -\infty$. La droite $x = -1$ est asymptote verticale.
- Quand $x \rightarrow 1$, $3 - x \rightarrow 2 > 0$. On a $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ et $x+1 \rightarrow 2 > 0$. Si $x > 1$, $x-1 > 0$ donc $x^2 - 1 \rightarrow 0^+$; si $x < 1$, $x^2 - 1 \rightarrow 0^-$. Par quotient : $\lim_{x \rightarrow 1^+} h = +\infty$ **et** $\lim_{x \rightarrow 1^-} h = -\infty$. La droite $x = 1$ est asymptote verticale.

B5.

- Pour $x \neq 3$: $\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3 \rightarrow 6$. **La limite vaut** 6.

2. $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$. Pour $x \neq -2$: le quotient vaut $x - 1 \rightarrow -3$. **La limite vaut -3 .**
3. $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ et $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$. Pour $x \neq 1, x \neq -1$: le quotient vaut $\frac{x - 2}{x + 1} \rightarrow \frac{-1}{2}$. **La limite vaut $-\frac{1}{2}$.**
4. Pour $x > -4, x \neq 0$: $\frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \frac{(x+4)-4}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+4}+2}$. Quand $x \rightarrow 0, \sqrt{x+4} \rightarrow 2$, donc par quotient **la limite vaut $\frac{1}{4}$.**

B6.

1. $-3x \rightarrow -\infty$ et $\lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$. Par composition, **la limite vaut 0.**
2. $4 + \frac{1}{x} \rightarrow 4$ et $\lim_{y \rightarrow 4} \sqrt{y} = 2$. Par composition, **la limite vaut 2.**
3. $x^2 - x = x(x - 1) \rightarrow +\infty$ (produit) et $\lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$. Par composition, **la limite vaut $+\infty$.**
4. Quand $x \rightarrow 0^+, \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ donc $-\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$; or $\lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$. Par composition, **la limite vaut 0.**
5. Quand $x \rightarrow -\infty, \frac{1}{x} \rightarrow 0$ et $\lim_{y \rightarrow 0} e^y = e^0 = 1$. Par composition, **la limite vaut 1.**
6. $-\frac{1}{n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ et $e^y \rightarrow 1$ quand $y \rightarrow 0$. Donc **la suite $(e^{-1/n})$ converge vers 1.**

B7.

1. Pour tout réel $x, \sin x \geq -1$, donc $x + \sin x \geq x - 1$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$. D'après le théorème de comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin x) = +\infty$.
2. Pour tout réel $x, -1 \leq \cos x \leq 1$. En divisant par $x > 0$ (le sens des inégalités est conservé) : $-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\pm \frac{1}{x}\right) = 0$, le théorème des gendarmes donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$.
3. La limite attendue est $-\infty$: on cherche donc une *majoration*. Pour tout $x, \sin x \leq 1$ donc $-x^2 + 3 \sin x \leq -x^2 + 3$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + 3) = -\infty$. Par comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + 3 \sin x) = -\infty$.

B8.

1. Croissances comparées ($n = 3$) : **la limite vaut 0.**
2. Croissances comparées ($n = 2$) : **la limite vaut $+\infty$.**
3. Avec $X = -x, X \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow -\infty$ et $x e^x = -X e^{-X}$. Or $X e^{-X} \rightarrow 0$ (croissances comparées) donc **la limite vaut 0.**
4. Pour tout $x, e^x - x = e^x (1 - x e^{-x})$. Comme $x e^{-x} \rightarrow 0$, le facteur entre parenthèses tend vers 1, et $e^x \rightarrow +\infty$. Par produit, **la limite vaut $+\infty$.**
5. $(x^2 + 1)e^{-x} = x^2 e^{-x} + e^{-x}$, avec $x^2 e^{-x} \rightarrow 0$ (croissances comparées) et $e^{-x} \rightarrow 0$. Par somme, **la limite vaut 0.**
6. $x e^{-x} \rightarrow 0$ (croissances comparées), donc par produit par 3 puis somme avec 2, **la limite vaut 2.**

B9.

1. **Vrai.** C'est la définition d'une asymptote horizontale : la limite en $+\infty$ est finie et égale à 3.
2. **Faux.** En $2^+, x - 2 \rightarrow 0^+$ et la limite est $+\infty$; en $2^-, x - 2 \rightarrow 0^-$ et la limite est $-\infty$. Les limites à droite et à gauche diffèrent : la fonction n'a pas de limite en 2.
3. **Faux** (forme indéterminée « $\infty \times 0$ »). Contre-exemple : $f(x) = x$ et $g(x) = \frac{1}{x}$; $f(x)g(x) = 1 \rightarrow 1 \neq 0$.
4. **Faux.** Contre-exemple : $f(x) = e^{-x}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et sa limite en $+\infty$ est 0, qui n'est pas strictement positive. Les inégalités strictes deviennent larges à la limite : on peut seulement affirmer $\ell \geq 0$.

B10.

1. Pour $x > 0$: $f(x) = \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} \rightarrow 2$. **La limite vaut 2.**
2. Pour tout $x \geq 0$: $f(x) - 2 = \frac{2x + 1 - 2(x + 3)}{x + 3} = \frac{2x + 1 - 2x - 6}{x + 3} = \frac{-5}{x + 3}$.
3. a) D'après la question 2, $|f(n) - 2| = \frac{5}{n + 3}$ car $n + 3 > 0$. Ainsi $|f(n) - 2| < 0,03 \iff n + 3 > \frac{5}{0,03} = \frac{500}{3} \approx 166,7 \iff n \geq 164$ (n entier).
- b) Le programme s'arrête dès que $|f(n) - 2| < 0,03$: il affiche le plus petit entier n vérifiant cette condition. Vérification : $\frac{5}{166} \approx 0,0301 \geq 0,03$ pour $n = 163$, et $\frac{5}{167} \approx 0,0299 < 0,03$ pour $n = 164$. **Le programme affiche 164.**
- c) La fonction $x \mapsto \frac{5}{x + 3}$ est décroissante sur $[0; +\infty[$: pour tout réel $x \geq 164$, $|f(x) - 2| \leq \frac{5}{167} < 0,03$. Donc $f(x)$ est à moins de 0,03 de 2 pour tout $x \geq 164$, ce qui illustre $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.