

Fiche 3 : comparaison et croissances comparées

Huit exercices sur les outils qui prennent le relais quand le calcul direct échoue : encadrer, comparer, utiliser les croissances comparées de l'exponentielle. Dans les corrections, « en $+\infty$ » signifie « quand $x \rightarrow +\infty$ ».

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac : inégalité écrite avec son domaine de validité, théorème nommé, conclusion.

Quel outil choisir ?

- $\sin x$, $\cos x$ ou $(-1)^n$ dans l'expression : encadre-le entre -1 et 1 .
- **Limite** $+\infty$: minore par une fonction simple qui tend vers $+\infty$.
- **Limite** $-\infty$: majore par une fonction qui tend vers $-\infty$.
- **Limite finie** : encadre par deux fonctions de même limite (gendarmes).
- **Produit** $x^n e^x$ ou $x^n e^{-x}$: croissances comparées.

Les pièges classiques

- Majorer pour prouver $+\infty$ (ça ne sert à rien).
- Diviser un encadrement par une quantité sans connaître son signe.
- Écrire « $\sin x \rightarrow 0$ en $+\infty$ » : la fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$, elle oscille indéfiniment.
- Écrire « $x e^{-x} = \infty \times 0 = 0$ » sans citer les croissances comparées.

L'exponentielle gagne toujours contre une puissance : elle n'a jamais perdu un match.

Exercice 1 (★) : comparaison en $+\infty$ et $-\infty$

Déterminer les limites :

1. $f(x) = x + \sin x$ en $+\infty$
2. $g(x) = x^2 - \cos x$ en $+\infty$
3. $h(x) = -x + \cos x$ en $+\infty$

Correction de l'exercice 1

Question 1

Pour tout x , $\sin x \geq -1$, donc $f(x) = x + \sin x \geq x - 1$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$. D'après le théorème de comparaison :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$$

Question 2

Pour tout x , $\cos x \leq 1$, donc $-\cos x \geq -1$ et $g(x) \geq x^2 - 1$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1) = +\infty$.

D'après le théorème de comparaison :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g = +\infty$$

Question 3

Pour tout x , $\cos x \leq 1$, donc $h(x) = -x + \cos x \leq -x + 1$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 1) = -\infty$. D'après le théorème de comparaison :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h = -\infty$$

Astuce : on **minore** pour montrer $+\infty$, on **majorer** pour montrer $-\infty$.

Exercice 2 (★★) : le théorème des gendarmes

Déterminer les limites en $+\infty$:

$$1. f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$2. g(x) = \frac{x + \cos x}{x}$$

$$3. h(x) = \frac{2x + \sin x}{x + 1}$$

Correction de l'exercice 2

Question 1

Pour tout $x > 0$, $-1 \leq \sin x \leq 1$. En divisant par $x > 0$: $-\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$. Or $\lim \left(-\frac{1}{x}\right) = \lim \frac{1}{x} = 0$ en $+\infty$. D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim f = 0$$

Question 2

Pour tout $x > 0$, $g(x) = 1 + \frac{\cos x}{x}$. Comme $-1 \leq \cos x \leq 1$, en divisant par $x > 0$: $-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$. Par gendarmes, $\frac{\cos x}{x} \rightarrow 0$, donc, par somme :

$$\lim g = 1$$

Question 3

Pour tout $x > 0$, $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc $2x - 1 \leq 2x + \sin x \leq 2x + 1$. En divisant par $x + 1 > 0$:

$$\frac{2x - 1}{x + 1} \leq h(x) \leq \frac{2x + 1}{x + 1}$$

Or $\frac{2x \pm 1}{x + 1} = \frac{2 \pm \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$ tend vers 2 par somme et quotient. D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim h = 2$$

Exercice 3 (★★★) : gendarmes en un réel

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$.
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x}$.
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^2}$.

Correction de l'exercice 3

Question 1

Pour tout $x \neq 0$, $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$. Donc $\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$, c'est-à-dire $-|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|$. Or $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$. D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

Question 2

Pour tout $x \neq 0$, $-1 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1$ et $x^2 > 0$, donc $-x^2 \leq x^2 \cos \frac{1}{x} \leq x^2$. Or $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$.

D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x} = 0$$

Question 3

Pour tout $x > 0$, $-1 \leq \sin x \leq 1$. En divisant par $x^2 > 0$: $-\frac{1}{x^2} \leq \frac{\sin x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$. Or

$\lim \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \lim \frac{1}{x^2} = 0$ en $+\infty$. D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^2} = 0$$

À retenir : « (quelque chose qui tend vers 0) $\times$ (quelque chose de borné) » tend vers 0. Ici, $x \rightarrow 0$ et $\sin \frac{1}{x}$ est bornée par 1, même si elle oscille de façon folle.

Exercice 4 (★★) : croissances comparées

Déterminer les limites :

1. $x^2 e^{-x}$ en $+\infty$
2. $\frac{e^x}{x}$ en $+\infty$
3. $x e^x$ en $-\infty$
4. $e^x - x^2$ en $+\infty$
5. $\frac{e^x}{e^x + x^2}$ en $+\infty$
6. $(x^3 - 5x)e^{-x}$ en $+\infty$

Correction de l'exercice 4

Méthode. On utilise les croissances comparées : pour tout entier $n \geq 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty, \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0.$$

Question 1

Par croissances comparées ($n = 2$) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0$$

Question 2

Par croissances comparées ($n = 1$) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Question 3

Par croissances comparées en $-\infty$ ($n = 1$) :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

Question 4

Pour tout x , $e^x - x^2 = e^x (1 - x^2 e^{-x})$. Par croissances comparées, $x^2 e^{-x} \rightarrow 0$, donc, par somme, $1 - x^2 e^{-x} \rightarrow 1$. Comme $e^x \rightarrow +\infty$, par produit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2) = +\infty$$

Question 5

Pour tout x , on divise le numérateur et le dénominateur par $e^x > 0$:

$$\frac{e^x}{e^x + x^2} = \frac{1}{1 + x^2 e^{-x}}$$

Par croissances comparées, $x^2 e^{-x} \rightarrow 0$, donc, par somme et quotient :

$$\lim = 1$$

Question 6

Pour tout x , $(x^3 - 5x)e^{-x} = x^3 e^{-x} - 5x e^{-x}$. Par croissances comparées, $x^3 e^{-x} \rightarrow 0$ et $x e^{-x} \rightarrow 0$. Par somme :

$$\lim = 0$$

Pépite : pour les questions 4 et 5, on met en facteur e^x pour « écraser » les puissances de x .

Exercice 5 (★★) : exponentielle et sinus

Déterminer en $+\infty$:

1. $f(x) = e^{-x} \sin x$

2. $g(x) = \frac{\cos x}{x^2 + 1}$

3. $h(x) = \frac{x \sin x}{x^2 + 1}$

Correction de l'exercice 5

Question 1

Pour tout x , $-1 \leq \sin x \leq 1$ et $e^{-x} > 0$, donc $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$. D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim f = 0$$

Question 2

Pour tout x , $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $x^2 + 1 > 0$, donc $-\frac{1}{x^2 + 1} \leq g(x) \leq \frac{1}{x^2 + 1}$. Les deux bornes tendent vers 0. D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim g = 0$$

Question 3

Pour tout $x > 0$, $|x \sin x| \leq x$, donc $|h(x)| \leq \frac{x}{x^2 + 1}$, c'est-à-dire :

$$-\frac{x}{x^2 + 1} \leq h(x) \leq \frac{x}{x^2 + 1}$$

Or $\frac{x}{x^2+1} = \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} \rightarrow 0$ par quotient. D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim h = 0$$

Exercice 6 (★★) : racines et conjuguée

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - x})$.

Correction de l'exercice 6

La transformation. La fonction est définie pour $x^2 - x \geq 0$, donc en particulier pour $x \geq 1$.

On est dans la forme « $+\infty - \infty$ ».

Pour tout $x \geq 1$, on multiplie par la quantité conjuguée (strictement positive) :

$$x - \sqrt{x^2 - x} = \frac{x^2 - (x^2 - x)}{x + \sqrt{x^2 - x}} = \frac{x}{x + \sqrt{x^2 - x}}$$

Comme $x > 0$, on divise le numérateur et le dénominateur par $x = \sqrt{x^2}$:

$$x - \sqrt{x^2 - x} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}$$

La limite. Quand $x \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, donc $\sqrt{1 - \frac{1}{x}} \rightarrow 1$ par composition. Par somme et quotient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - x}) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Exercice 7 (★★) : de la fonction aux suites

1. Déterminer la limite de la suite $u_n = n^2 e^{-n}$.

2. Déterminer la limite de la suite $v_n = \frac{e^n}{n^3}$.

3. Soit $f(x) = \frac{3x+1}{x+2}$. Déterminer $\lim f(n)$ et $\lim f\left(\frac{1}{n}\right)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Correction de l'exercice 7

Question 1

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0$. Donc la suite $(n^2 e^{-n})$ tend vers 0 :

$$\lim u_n = 0$$

Question 2

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$. Donc :

$$\lim v_n = +\infty$$

Question 3

Pour tout $n \geq 1$, $f(n) = \frac{3n+1}{n+2} = \frac{3 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}}$. Par somme et quotient :

$$\lim f(n) = 3$$

De même $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{3}{n} + 1}{\frac{1}{n} + 2}$. Quand $n \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, donc, par somme et quotient :

$$\lim f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}, \text{ c'est-à-dire } f(0).$$

À retenir : si $f(x) \rightarrow \ell$ quand $x \rightarrow +\infty$, alors la suite $f(n)$ tend vers ℓ . C'est le pont entre le chapitre des suites et celui-ci.

Exercice 8 (★★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse (preuve ou contre-exemple) :

1. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors f est croissante au voisinage de $+\infty$.
2. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et si g est bornée, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) = 0$.
3. Si $\lim f = +\infty$ et $\lim g = -\infty$, alors $\lim(f+g) = 0$.
4. Si f a une asymptote horizontale en $+\infty$, alors f est bornée au voisinage de $+\infty$.
5. La courbe d'une fonction ne peut jamais couper son asymptote horizontale.
6. Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 3$, alors $x = a$ est une asymptote verticale.

Correction de l'exercice 8

Affirmation 1

Contre-exemple : $f(x) = x + 2 \sin x$.

Comme $\sin x \geq -1$, $f(x) \geq x - 2$, donc par comparaison $f(x) \rightarrow +\infty$.

Pourtant f est dérivable, avec $f'(x) = 1 + 2 \cos x$, et $f'(x) < 0$ dès que $\cos x < -\frac{1}{2}$: f est décroissante sur des intervalles arbitrairement loin.

Elle n'est donc croissante sur aucun intervalle $[A; +\infty[$.

Faux.

Affirmation 2

Soit M tel que $|g(x)| \leq M$ pour tout x . Alors $|f(x)g(x)| \leq M|f(x)|$, c'est-à-dire $-M|f(x)| \leq f(x)g(x) \leq M|f(x)|$. Comme $f(x) \rightarrow 0$, $|f(x)| \rightarrow 0$, donc $M|f(x)| \rightarrow 0$. D'après le théorème des gendarmes, $f(x)g(x) \rightarrow 0$.

Vrai.

Affirmation 3

C'est une forme indéterminée « $+\infty - \infty$ ». Contre-exemple : $f(x) = x^2$ et $g(x) = -x$ donnent $f(x) + g(x) = x^2 - x \rightarrow +\infty$. Autre exemple : $f(x) = x + 1$ et $g(x) = -x$ donnent $f(x) + g(x) = 1 \rightarrow 1$.

Faux.

Affirmation 4

Si $f(x) \rightarrow B$, il existe A tel que, pour tout $x \geq A$, $B - 1 < f(x) < B + 1$. Donc f est bornée sur $[A; +\infty[$.

Vrai.

Affirmation 5

Contre-exemple : $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ tend vers 0 en $+\infty$ (exercice 2), donc l'axe des abscisses est asymptote horizontale. Et pourtant la courbe coupe cet axe en chaque multiple non nul de π (car $\sin x = 0$).

Faux.

Affirmation 6

Une droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale dès que la limite en a est infinie d'au moins un côté (à droite ou à gauche). Ici $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ suffit.

Vrai.

Ce qui peut tomber au bac

- Une **limite avec cos ou sin** à encadrer (exercices 1, 2, 5).
- Une limite avec $x^n e^x$ ou $x^n e^{-x}$ dans une étude de fonction (exercice 4).
- Une **forme indéterminée à racine** (exercice 6).
- Un **vrai/faux** sur les pièges des limites (exercice 8).
- Un **lien fonction/suite** (exercice 7).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Quelle est la limite de $x e^{-x}$ quand $x \rightarrow +\infty$?

- A. 0 (**bonne réponse**)
- B. $+\infty$
- C. 1
- D. $-\infty$

Justification : Par croissances comparées, $x^n e^{-x} \rightarrow 0$ en $+\infty$: l'exponentielle l'emporte.

2. Quelle est la limite de $\frac{e^x}{x^2}$ quand $x \rightarrow +\infty$?

- A. 0
- B. $+\infty$ (**bonne réponse**)
- C. e
- D. 1

Justification : Par croissances comparées, $\frac{e^x}{x^n} \rightarrow +\infty$.

3. Quelle est la limite de $x + \cos x$ quand $x \rightarrow +\infty$?

- A. $+\infty$ (**bonne réponse**)
- B. 0
- C. 1
- D. La limite n'existe pas

Justification : $x + \cos x \geq x - 1$ et $x - 1 \rightarrow +\infty$: théorème de comparaison.

4. Quelle est la limite de $x^2 e^x$ quand $x \rightarrow -\infty$?

- A. 0 (**bonne réponse**)
- B. $+\infty$
- C. $-\infty$
- D. 1

Justification : Par croissances comparées, $x^n e^x \rightarrow 0$ en $-\infty$.

5. Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si g et h tendent vers ℓ , alors :

- A. f n'a pas de limite
- B. f tend vers $g(0)$
- C. f tend vers ℓ (bonne réponse)
- D. f tend vers 0

Justification : C'est le théorème des gendarmes pour les fonctions.

6. Dans l'exercice 2, quelle est la limite en $+\infty$ de $h(x) = \frac{2x + \sin x}{x + 1}$?

- A. 0
- B. $+\infty$
- C. 1
- D. 2 (bonne réponse)

Justification : On encadre $\sin x$ entre -1 et 1 et on applique le théorème des gendarmes : $h(x) \rightarrow 2$.

7. Dans l'exercice 4, quelle est la limite en $+\infty$ de $\frac{e^x}{e^x + x^2}$?

- A. 1 (bonne réponse)
- B. $+\infty$
- C. 0
- D. $\frac{1}{2}$

Justification : On factorise par e^x au numérateur et au dénominateur : $\frac{1}{1 + x^2 e^{-x}} \rightarrow 1$ car $x^2 e^{-x} \rightarrow 0$ (croissances comparées).

8. Dans l'exercice 6, quelle est la limite en $+\infty$ de $x - \sqrt{x^2 - x}$?

- A. 1
- B. $+\infty$
- C. 0
- D. $\frac{1}{2}$ (bonne réponse)

Justification : En multipliant par la quantité conjuguée : $x - \sqrt{x^2 - x} = \frac{x}{x + \sqrt{x^2 - x}} \rightarrow \frac{1}{2}$.

9. Dans l'exercice 7, quelle est la limite de la suite $v_n = \frac{e^n}{n^3}$?

- A. 1
- B. 0
- C. e
- D. $+\infty$ (bonne réponse)

Justification : Par croissances comparées, l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de n .

10. Dans l'exercice 8, l'affirmation « si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors f est croissante au voisinage de $+\infty$ » est :

- A. vraie, c'est le théorème de comparaison
- B. vraie seulement si f est un polynôme
- C. vraie seulement si f est continue
- D. **fausse (contre-exemple : $f(x) = x + \sin x$) (bonne réponse)**

Justification : $f(x) = x + \sin x$ tend vers $+\infty$ mais oscille localement (elle n'est pas monotone).