

Fiche 2 : limites en un réel

Huit exercices sur les limites en un point : dénominateur qui tend vers 0, formes $\frac{0}{0}$, racines, composées, asymptotes verticales. Ici, le maître mot est « **le signe** » : dans presque tous les exercices, il fait la différence entre $+\infty$ et $-\infty$.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac : signe du dénominateur justifié, côté précisé, règle nommée, conclusion.

Les réflexes à avoir en tête

- **Dénominateur $\rightarrow 0$** : donne la limite du numérateur (un réel non nul), puis étudie le signe du dénominateur en $x \rightarrow a^+$ et $x \rightarrow a^-$.
- **Forme $\frac{0}{0}$** : factorise par $(x - a)$ en haut et en bas, ou utilise la quantité conjuguée.
- **Une asymptote verticale** apparaît quand la limite est infinie, même d'un seul côté.

Les pièges classiques

- Dire « $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = +\infty$ » : il faut séparer 1^+ et 1^- .
 - Confondre une simplification qui supprime le problème (« trou » dans la courbe) et une vraie asymptote.
 - Oublier que $(x - a)^2$ est toujours positif : les deux côtés donnent le même signe.
 - Écrire « $\frac{0}{0} = 0$ » ou « $\frac{0}{0} = 1$ » : c'est une forme indéterminée.
- « $\frac{0}{0}$ » : la seule fraction dont le résultat dépend de l'humeur de l'énoncé.

Exercice 1 (★) : la référence $\frac{1}{x-a}$

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2}$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2}$.
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2}$.

Exercice 2 (★) : un quotient avec dénominateur nul

Soit $f(x) = \frac{3x+1}{x-1}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Déterminer les limites de f en 1^+ et en 1^- . Que peut-on en déduire pour la courbe ?

Exercice 3 (★★) : la forme $\frac{0}{0}$

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$

3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9}$

4. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}$

Exercice 4 (★★★★) : un signe à quatre cas

Soit $f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - 4}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$. Déterminer les limites de f en 2^+ , 2^- , -2^+ et -2^- .
En déduire les asymptotes verticales.

Exercice 5 (★★) : avec des racines en un réel

1. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x}$

Exercice 6 (★★) : trou ou asymptote ?

Soient $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ et $g(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$, définies sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Étudier les limites de f et de g en 1. Laquelle des deux courbes admet une asymptote verticale ?

Exercice 7 (★★) : composée et côtés

Déterminer, si elle existe, la limite en 0 de chaque fonction, en distinguant les côtés si nécessaire :

1. $f(x) = e^{1/x}$

2. $g(x) = e^{-1/x^2}$

3. $h(x) = \frac{1}{1 + e^{1/x}}$

Exercice 8 (★★★) : une étude complète type bac

Soit $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - x}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.

1. Factoriser le numérateur et le dénominateur, et simplifier $f(x)$.
2. Déterminer les limites de f en 0^+ , en 0^- et en 1.
3. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. En déduire les asymptotes de la courbe, puis étudier la position de la courbe par rapport à son asymptote horizontale.

Ce qui peut tomber au bac sur les limites en un réel

- Un **quotient avec dénominateur nul** et un tableau de signes (exercices 2 et 4).
- Une **forme $\frac{0}{0}$** à factoriser (exercices 3 et 6).
- Une **racine** avec quantité conjuguée (exercice 5).
- Une **fonction composée avec exponentielle** et une limite à gauche / à droite (exercice 7).
- Une **étude complète** avec asymptotes et position relative (exercice 8).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Quelle est la limite de $\frac{1}{x-2}$ quand $x \rightarrow 2$ avec $x > 2$?

- A. $+\infty$
- B. 0
- C. $\frac{1}{2}$
- D. $-\infty$

2. Quelle est la limite de $\frac{1}{x-2}$ quand $x \rightarrow 2$ avec $x < 2$?

- A. $-\infty$
- B. $+\infty$
- C. 0
- D. $-\frac{1}{2}$

3. Quelle est la limite de $\frac{x^2 + x}{x}$ quand $x \rightarrow 0$?

- A. 1
- B. 0

- C. $+\infty$
- D. La limite n'existe pas
4. Quelle est la limite de $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ quand $x \rightarrow 1$?
- A. 2
- B. 0
- C. 1
- D. $+\infty$
5. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, la courbe de f admet :
- A. aucune asymptote
- B. une asymptote oblique
- C. la droite $y = a$ comme asymptote horizontale
- D. la droite $x = a$ comme asymptote verticale
6. Dans l'exercice 2, avec $f(x) = \frac{3x + 1}{x - 1}$, que peut-on déduire des limites en 1^+ et 1^- ?
- A. la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale
- B. la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale
- C. f est continue en 1
- D. f admet un maximum en 1
7. Dans l'exercice 3, quelle est la limite en 2 de $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$?
- A. $+\infty$
- B. $\frac{4}{1}$
- C. 0
- D. 4
8. Dans l'exercice 4, combien la courbe de $f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - 4}$ admet-elle d'asymptotes verticales ?
- A. 2 : les droites $x = 2$ et $x = -2$
- B. 0
- C. 4
- D. 1 seule
9. Dans l'exercice 6, pourquoi la courbe de $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ n'a-t-elle **pas** d'asymptote verticale en 1, contrairement à g ?
- A. Le dénominateur de f ne s'annule pas
- B. Le numérateur de f s'annule aussi en 1 : la limite de f en 1 est finie
- C. f est un polynôme

D. f n'est pas définie en 1

10. Dans l'exercice 8, quelle est la limite de $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - x}$ en 0^+ , après simplification en $f(x) = \frac{2x - 1}{x}$?

A. -1

B. $+\infty$

C. $-\infty$

D. 2