

Fiche 2 : limites en un réel

Huit exercices sur les limites en un point : dénominateur qui tend vers 0, formes $\frac{0}{0}$, racines, composées, asymptotes verticales. Ici, le maître mot est « **le signe** » : dans presque tous les exercices, il fait la différence entre $+\infty$ et $-\infty$.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac : signe du dénominateur justifié, côté précisé, règle nommée, conclusion.

Les réflexes à avoir en tête

- **Dénominateur $\rightarrow 0$** : donne la limite du numérateur (un réel non nul), puis étudie le signe du dénominateur en $x \rightarrow a^+$ et $x \rightarrow a^-$.
- **Forme $\frac{0}{0}$** : factorise par $(x - a)$ en haut et en bas, ou utilise la quantité conjuguée.
- **Une asymptote verticale** apparaît quand la limite est infinie, même d'un seul côté.

Les pièges classiques

- Dire « $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = +\infty$ » : il faut séparer 1^+ et 1^- .
 - Confondre une simplification qui supprime le problème (« trou » dans la courbe) et une vraie asymptote.
 - Oublier que $(x - a)^2$ est toujours positif : les deux côtés donnent le même signe.
 - Écrire « $\frac{0}{0} = 0$ » ou « $\frac{0}{0} = 1$ » : c'est une forme indéterminée.
- « $\frac{0}{0}$ » : la seule fraction dont le résultat dépend de l'humeur de l'énoncé.

Exercice 1 (★) : la référence $\frac{1}{x-a}$

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2}$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2}$.
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2}$.

Correction de l'exercice 1

Question 1

Quand $x \rightarrow 2^+$, $x > 2$, donc $x - 2$ tend vers 0 par valeurs strictement positives : $x - 2 \rightarrow 0^+$.

Par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

Quand $x \rightarrow 2^-$, $x < 2$, donc $x - 2 \rightarrow 0^-$ (valeurs strictement négatives). Par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

Les deux limites sont différentes : la limite en 2 n'existe pas.

Question 2

Pour tout $x \neq 2$, $(x-2)^2 > 0$ (c'est un carré), et $(x-2)^2$ tend vers 0 : on a donc $(x-2)^2 \rightarrow 0^+$ des deux côtés. Par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$$

Sans avoir besoin de séparer les côtés.

Exercice 2 (★) : un quotient avec dénominateur nul

Soit $f(x) = \frac{3x+1}{x-1}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Déterminer les limites de f en 1^+ et en 1^- . Que peut-on en déduire pour la courbe ?

Correction de l'exercice 2

Quand $x \rightarrow 1$, le numérateur $3x+1$ tend vers 4, un réel strictement positif.

En 1^+ : $x > 1$, donc $x-1 \rightarrow 0^+$; par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

En 1^- : $x < 1$, donc $x-1 \rightarrow 0^-$; par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

Conséquence : comme la limite en 1 (à droite comme à gauche) est infinie, la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe.

Exercice 3 (★★) : la forme $\frac{0}{0}$

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$

3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9}$

4. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}$

Correction de l'exercice 3

Méthode. Dans chaque cas, le numérateur et le dénominateur tendent vers 0 : c'est la forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ». On factorise par $(x - a)$ pour simplifier, avec $x \neq a$.

Question 1

Pour $x \neq 1$:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} = 2$$

Question 2

$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ et $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ (racines 1 et 2). Pour $x \neq 2$ et $x \neq 1$, le quotient vaut $\frac{x + 2}{x - 1}$. Par quotient (dénominateur de limite 1, non nulle) :

$$\lim_{x \rightarrow 2} = \frac{4}{1} = 4$$

Question 3

Pour $x \neq 3$ et $x \neq -3$:

$$\frac{x - 3}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{1}{x + 3}$$

Par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow 3} = \frac{1}{6}$$

Question 4

$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$. Pour $x \neq -1$, le quotient vaut $x - 2$.

$$\lim_{x \rightarrow -1} = -3$$

Astuce : pour factoriser $x^2 - 3x + 2$, cherche les racines : ici 1 et 2, dont la somme est 3 et le produit est 2.

Exercice 4 (★★★) : un signe à quatre cas

Soit $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-4}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$. Déterminer les limites de f en 2^+ , 2^- , -2^+ et -2^- .
En déduire les asymptotes verticales.

Correction de l'exercice 4

Le dénominateur. On factorise : $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.

En 2 . Le numérateur tend vers $3 > 0$.

En 2^+ : $x - 2 > 0$ et $x + 2 > 0$, donc $x^2 - 4 > 0$ et $x^2 - 4 \rightarrow 0^+$; par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f = +\infty$$

En 2^- : $x - 2 < 0$ et $x + 2 > 0$, donc $x^2 - 4 < 0$ et $x^2 - 4 \rightarrow 0^-$; par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f = -\infty$$

En -2 . Le numérateur tend vers $-5 < 0$.

En -2^+ : $x - 2 < 0$ et $x + 2 > 0$, donc $x^2 - 4 \rightarrow 0^-$; par quotient, $\frac{-5}{0^-}$ donne :

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f = +\infty$$

En -2^- : $x - 2 < 0$ et $x + 2 < 0$, donc $x^2 - 4 > 0$ et $x^2 - 4 \rightarrow 0^+$; par quotient, $\frac{-5}{0^+}$ donne :

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f = -\infty$$

Conclusion. Les limites en 2 et en -2 sont infinies, donc la courbe admet deux asymptotes verticales.

Les droites d'équations $x = 2$ et $x = -2$.

Méthode : ce qui rapporte des points, c'est le tableau de signes du dénominateur, dessiné à côté.

Exercice 5 (★★) : avec des racines en un réel

1. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x}$

Correction de l'exercice 5

Méthode. Dans chaque cas, on est dans la forme « $\frac{0}{0}$ ». On multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du numérateur (strictement positive).

Question 1

Pour $x \geq 0$, $x \neq 4$, $x - 4 = (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)$. Donc :

$$\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$$

Quand $x \rightarrow 4$, $\sqrt{x} \rightarrow 2$ (continuité de la racine), donc, par quotient :

$$\lim = \frac{1}{4}$$

Question 2

Pour $x > -1$, $x \neq 0$:

$$\frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \frac{(x+1) - 1}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1}$$

Quand $x \rightarrow 0$, $\sqrt{x+1} \rightarrow 1$, donc, par quotient :

$$\lim = \frac{1}{2}$$

Question 3

Pour $x > -9$, $x \neq 0$:

$$\frac{\sqrt{x+9} - 3}{x} = \frac{(x+9) - 9}{x(\sqrt{x+9} + 3)} = \frac{1}{\sqrt{x+9} + 3}$$

Quand $x \rightarrow 0$, $\sqrt{x+9} \rightarrow 3$, donc, par quotient :

$$\lim = \frac{1}{6}$$

Lien avec la dérivation : la première limite est le nombre dérivé de $x \mapsto \sqrt{x}$ en 4. Les deux autres sont les nombres dérivés de $x \mapsto \sqrt{x+1}$ et de $x \mapsto \sqrt{x+9}$ en 0.

Exercice 6 (★★) : trou ou asymptote ?

Soient $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ et $g(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$, définies sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Étudier les limites de f et de g en 1. Laquelle des deux courbes admet une asymptote verticale ?

Correction de l'exercice 6

Pour f . $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$. Donc, pour $x \neq 1$, $f(x) = x + 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

La limite est finie : il n'y a pas d'asymptote verticale en $x = 1$. La courbe de f coïncide avec la droite d'équation $y = x + 2$, privée du point d'abscisse 1 (un « trou »).

Pour g . Quand $x \rightarrow 1$, le numérateur tend vers $1 + 1 + 1 = 3 > 0$.

En 1^+ , $x - 1 \rightarrow 0^+$; par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g = +\infty$$

En 1^- , $x - 1 \rightarrow 0^-$; par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g = -\infty$$

Les limites sont infinies : la courbe de g admet la droite d'équation $x = 1$ comme asymptote verticale.

Conclusion.

Seule la courbe de g admet une asymptote verticale.

À retenir : un dénominateur qui s'annule ne suffit pas à créer une asymptote. Il faut regarder le numérateur : s'il s'annule aussi, on factorise.

Exercice 7 (★★) : composée et côtés

Déterminer, si elle existe, la limite en 0 de chaque fonction, en distinguant les côtés si nécessaire :

1. $f(x) = e^{1/x}$

2. $g(x) = e^{-1/x^2}$

3. $h(x) = \frac{1}{1 + e^{1/x}}$

Correction de l'exercice 7

Question 1

En 0^+ , $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, et $\lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$. Par composition :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f = +\infty$$

En 0^- , $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$, et $\lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$. Par composition :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f = 0$$

Les limites à droite et à gauche sont différentes.

f n'a pas de limite en 0.

Question 2

Pour $x \neq 0$, $x^2 > 0$ et $x^2 \rightarrow 0^+$, donc $\frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty$ et $-\frac{1}{x^2} \rightarrow -\infty$ des deux côtés. Comme

$\lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$, par composition :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g = 0$$

Question 3

En 0^+ , $e^{1/x} \rightarrow +\infty$ (question 1), donc $1 + e^{1/x} \rightarrow +\infty$ et, par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h = 0$$

En 0^- , $e^{1/x} \rightarrow 0$, donc $1 + e^{1/x} \rightarrow 1$ et, par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h = 1$$

Les limites à droite et à gauche sont différentes.

h n'a pas de limite en 0.

Exercice 8 (★★★) : une étude complète type bac

Soit $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - x}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.

1. Factoriser le numérateur et le dénominateur, et simplifier $f(x)$.
2. Déterminer les limites de f en 0^+ , en 0^- et en 1.
3. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. En déduire les asymptotes de la courbe, puis étudier la position de la courbe par rapport à son asymptote horizontale.

Correction de l'exercice 8

Question 1

Le numérateur a pour racines $\frac{1}{2}$ et 1 : $2x^2 - 3x + 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1) = (2x - 1)(x - 1)$.

Le dénominateur vaut $x^2 - x = x(x - 1)$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$:

$$f(x) = \frac{(2x - 1)(x - 1)}{x(x - 1)}$$

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x}$$

Question 2

En 0. Le numérateur $2x - 1$ tend vers $-1 < 0$.

En 0^+ , $x \rightarrow 0^+$, donc, par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f = -\infty$$

En 0^- , $x \rightarrow 0^-$, donc, par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f = +\infty$$

En 1. $f(x) = \frac{2x - 1}{x}$, et par quotient (dénominateur de limite 1, non nulle) :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f = 1$$

La limite est finie : pas d'asymptote verticale en 1 (la courbe a un « trou » au point d'abscisse 1).

Question 3

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$, $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$. Comme $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ en $+\infty$ et en $-\infty$, par somme :

$$\lim f = 2 \text{ en } +\infty \text{ et en } -\infty$$

Question 4

Comme les limites de f en 0^+ et en 0^- sont infinies :

la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe.

Comme $\lim f = 2$ en $+\infty$ et en $-\infty$:

la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe en $+\infty$ et en $-\infty$.

Position. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$, $f(x) - 2 = -\frac{1}{x}$. Pour $x > 0$ ($x \neq 1$), $f(x) - 2 < 0$: la courbe est **en dessous** de l'asymptote horizontale. Pour $x < 0$, $f(x) - 2 > 0$: elle est **au-dessus**.

Pépite : la simplification par $(x - 1)$ supprime une fausse alerte : il n'y a pas d'asymptote verticale en $x = 1$.

Ce qui peut tomber au bac sur les limites en un réel

- Un **quotient avec dénominateur nul** et un tableau de signes (exercices 2 et 4).
- Une **forme $\frac{0}{0}$** à factoriser (exercices 3 et 6).
- Une **racine** avec quantité conjuguée (exercice 5).
- Une **fonction composée avec exponentielle** et une limite à gauche / à droite (exercice 7).
- Une **étude complète** avec asymptotes et position relative (exercice 8).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Quelle est la limite de $\frac{1}{x-2}$ quand $x \rightarrow 2$ avec $x > 2$?

- A. $+\infty$ (**bonne réponse**)
- B. 0
- C. $\frac{1}{2}$
- D. $-\infty$

Justification : Pour $x > 2$, $x - 2$ est positif et tend vers 0 : l'inverse tend vers $+\infty$.

2. Quelle est la limite de $\frac{1}{x-2}$ quand $x \rightarrow 2$ avec $x < 2$?

- A. $-\infty$ (**bonne réponse**)
- B. $+\infty$
- C. 0
- D. $-\frac{1}{2}$

Justification : Pour $x < 2$, $x - 2$ est négatif et tend vers 0 : l'inverse tend vers $-\infty$.

3. Quelle est la limite de $\frac{x^2 + x}{x}$ quand $x \rightarrow 0$?

- A. 1 (**bonne réponse**)
- B. 0
- C. $+\infty$
- D. La limite n'existe pas

Justification : Pour $x \neq 0$, $\frac{x^2 + x}{x} = x + 1 \rightarrow 1$. On lève la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ en simplifiant.

4. Quelle est la limite de $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ quand $x \rightarrow 1$?

A. **2 (bonne réponse)**

B. 0

C. 1

D. $+\infty$

Justification : $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 \rightarrow 2$.

5. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, la courbe de f admet :

A. aucune asymptote

B. une asymptote oblique

C. la droite $y = a$ comme asymptote horizontale

D. **la droite $x = a$ comme asymptote verticale (bonne réponse)**

Justification : Une limite infinie en un réel a donne l'asymptote verticale d'équation $x = a$.

6. Dans l'exercice 2, avec $f(x) = \frac{3x + 1}{x - 1}$, que peut-on déduire des limites en 1^+ et 1^- ?

A. la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale

B. **la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale (bonne réponse)**

C. f est continue en 1

D. f admet un maximum en 1

Justification : Les limites à gauche et à droite en 1 sont infinies : c'est la définition d'une asymptote verticale.

7. Dans l'exercice 3, quelle est la limite en 2 de $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$?

A. $+\infty$

B. $\frac{4}{1}$

C. 0

D. **4 (bonne réponse)**

Justification : $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{x + 2}{x - 1} \rightarrow 4$ quand $x \rightarrow 2$.

8. Dans l'exercice 4, combien la courbe de $f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - 4}$ admet-elle d'asymptotes verticales ?

A. **2 : les droites $x = 2$ et $x = -2$ (bonne réponse)**

B. 0

C. 4

D. 1 seule

Justification : Le dénominateur s'annule en **2** et en **-2**, avec des limites infinies des deux côtés à chaque fois.

9. Dans l'exercice 6, pourquoi la courbe de $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ n'a-t-elle **pas** d'asymptote verticale en **1**, contrairement à **g** ?

- A. Le dénominateur de f ne s'annule pas
- B. **Le numérateur de f s'annule aussi en 1 : la limite de f en 1 est finie (bonne réponse)**
- C. f est un polynôme
- D. f n'est pas définie en 1

Justification : $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$ se simplifie avec $(x - 1)$: $f(x) = x + 2 \rightarrow 3$, une limite finie.

10. Dans l'exercice 8, quelle est la limite de $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - x}$ en 0^+ , après simplification en $f(x) = \frac{2x - 1}{x}$?

- A. -1
- B. $+\infty$
- C. $-\infty$ **(bonne réponse)**
- D. 2

Justification : Quand $x \rightarrow 0^+$, le numérateur $2x - 1 \rightarrow -1 < 0$ et le dénominateur $x \rightarrow 0^+$: le quotient tend vers $-\infty$.