

Fiche 1 : limites en l'infini

Huit exercices sur les limites en $+\infty$ et en $-\infty$: polynômes, fractions, racines, exponentielles, composées, asymptotes horizontales. Dans les corrections, « en $+\infty$ » signifie « quand $x \rightarrow +\infty$ ».

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac : transformation écrite, règle nommée à chaque limite, conclusion.

Les réflexes à avoir en tête

- **Polynôme ou fraction** : on factorise par le terme de plus haut degré.
- **Racines** : quantité conjuguée, avec $\sqrt{x^2} = |x|$.
- **En $-\infty$** : attention à la parité de l'exposant, et pense à poser $X = -x$.
- **Exponentielle** : en $+\infty$, divise par e^x . En $-\infty$, $e^x \rightarrow 0$.

Les pièges classiques

- Écrire « $+\infty - \infty = 0$ ».
- Oublier que $\sqrt{x^2} = -x$ quand $x < 0$.
- Oublier de traiter séparément $+\infty$ et $-\infty$: les résultats peuvent différer.
- Écrire « $\frac{\infty}{\infty} = 1$ » : c'est une forme indéterminée.

Traite $+\infty$ et $-\infty$ comme deux personnes différentes : elles ont parfois le même caractère, mais pas toujours.

Exercice 1 (★) : polynômes

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de chaque fonction :

1. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

2. $g(x) = -3x^4 + x$

3. $h(x) = 5 - 2x$

Exercice 2 (★) : fractions rationnelles

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$:

1. $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$

2. $g(x) = \frac{x^2+1}{3x^2-x}$

3. $h(x) = \frac{x^3+1}{x^2+x}$

4. $k(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$

Exercice 3 (★★) : la quantité conjuguée

1. En $+\infty$: $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

2. En $+\infty$: $g(x) = \sqrt{x^2+x} - x$

3. En $+\infty$: $h(x) = x - \sqrt{x^2+1}$

4. En $-\infty$: $k(x) = \sqrt{x^2+1} + x$

Exercice 4 (★★) : le piège de $\sqrt{x^2}$

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de :

1. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

2. $g(x) = \frac{\sqrt{x^2+4x}}{x+1}$

Exercice 5 (★★) : avec l'exponentielle

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$:

1. $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$

2. $g(x) = \frac{2e^x+1}{e^x+3}$

3. $h(x) = 3 - e^{-x}$

Exercice 6 (★★) : asymptote et position relative

Soit $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 + 2}$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. En déduire une asymptote.
2. Étudier la position relative de la courbe et de cette asymptote.

Exercice 7 (★★) : limites de composées

Déterminer :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1/x}$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^x}$

Exercice 8 (★★★) : retour à la définition

1. Soit $f(x) = x^2 - 3x$. Déterminer un réel A_0 tel que, pour tout $x \geq A_0$, $f(x) \geq 10^6$. Que peut-on en déduire ?
2. Soit $g(x) = 2 + \frac{1}{x}$. Déterminer un réel B_0 tel que, pour tout $x \geq B_0$, $|g(x) - 2| < 10^{-3}$. Que peut-on en déduire ?

Ce qui peut tomber au bac sur les limites en l'infini

- Des limites de **polynômes et de fractions rationnelles** (exercices 1, 2, 6).
- Une **forme indéterminée avec racine** (exercices 3 et 4).
- Des limites avec **exponentielle** en $\pm\infty$ (exercice 5), souvent dans une étude de fonction complète.
- Une **asymptote horizontale** avec position relative (exercice 6).
- Des **compositions** de limites (exercice 7).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Quelle est la limite de $x^2 - 3x$ quand $x \rightarrow +\infty$?
A. 0

- B. $-\infty$
C. -3
D. $+\infty$
2. Quelle est la limite de $\frac{2x+1}{x-3}$ quand $x \rightarrow +\infty$?
A. 2
B. 0
C. $+\infty$
D. $-\frac{1}{3}$
3. Quelle est la limite de e^x quand $x \rightarrow -\infty$?
A. 0
B. $+\infty$
C. 1
D. $-\infty$
4. Quelle est la limite de $\frac{1}{x^2}$ quand $x \rightarrow +\infty$?
A. 0
B. $+\infty$
C. 1
D. La limite n'existe pas
5. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, la courbe de f admet :
A. aucune asymptote
B. une asymptote oblique
C. la droite $x = b$ comme asymptote verticale
D. la droite $y = b$ comme asymptote horizontale
6. Dans l'exercice 2, quelle est la limite en $+\infty$ de $h(x) = \frac{x^3+1}{x^2+x}$?
A. $-\infty$
B. 0
C. $+\infty$
D. 1
7. Dans l'exercice 3, quelle est la limite en $+\infty$ de $g(x) = \sqrt{x^2+x} - x$?
A. 1
B. $+\infty$
C. 0

D. $\frac{1}{2}$

8. Dans l'exercice 4, quelle est la limite en $-\infty$ de $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$?

A. 1

B. $+\infty$

C. 0

D. -1

9. Dans l'exercice 6, quelle est l'asymptote de $f(x) = \frac{3x^2+1}{x^2+2}$ en $+\infty$ et en $-\infty$?

A. la droite d'équation $y = 3$

B. il n'y a pas d'asymptote

C. la droite d'équation $x = 3$

D. la droite d'équation $y = 0$

10. Dans l'exercice 8, pour $f(x) = x^2 - 3x$, on cherche A_0 tel que $f(x) \geq 10^6$ pour $x \geq A_0$. Cela sert à prouver que :

A. $f(0) = 0$

B. f est continue

C. f est croissante

D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$