

Fiche 1 : limites en l'infini

Huit exercices sur les limites en $+\infty$ et en $-\infty$: polynômes, fractions, racines, exponentielles, composées, asymptotes horizontales. Dans les corrections, « en $+\infty$ » signifie « quand $x \rightarrow +\infty$ ».

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac : transformation écrite, règle nommée à chaque limite, conclusion.

Les réflexes à avoir en tête

- **Polynôme ou fraction :** on factorise par le terme de plus haut degré.
- **Racines :** quantité conjuguée, avec $\sqrt{x^2} = |x|$.
- **En $-\infty$:** attention à la parité de l'exposant, et pense à poser $X = -x$.
- **Exponentielle :** en $+\infty$, divise par e^x . En $-\infty$, $e^x \rightarrow 0$.

Les pièges classiques

- Écrire « $+\infty - \infty = 0$ ».
- Oublier que $\sqrt{x^2} = -x$ quand $x < 0$.
- Oublier de traiter séparément $+\infty$ et $-\infty$: les résultats peuvent différer.
- Écrire « $\frac{\infty}{\infty} = 1$ » : c'est une forme indéterminée.

Traite $+\infty$ et $-\infty$ comme deux personnes différentes : elles ont parfois le même caractère, mais pas toujours.

Exercice 1 (★) : polynômes

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de chaque fonction :

1. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

2. $g(x) = -3x^4 + x$

3. $h(x) = 5 - 2x$

Correction de l'exercice 1

Question 1

Forme indéterminée « $+\infty - \infty$ ». Pour tout $x \neq 0$, $f(x) = x^3 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}\right)$. Quand $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$, $\frac{2}{x} \rightarrow 0$ et $\frac{1}{x^3} \rightarrow 0$, donc, par somme, $1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} \rightarrow 1$. Or $x^3 \rightarrow +\infty$ en $+\infty$ et $x^3 \rightarrow -\infty$ en $-\infty$. Par produit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$$

Question 2

Pour tout $x \neq 0$, $g(x) = x^4 \left(-3 + \frac{1}{x^3} \right)$. Comme $\frac{1}{x^3} \rightarrow 0$, par somme $-3 + \frac{1}{x^3} \rightarrow -3$.

Comme $x^4 \rightarrow +\infty$ des deux côtés (exposant pair), par produit :

$\lim g = -\infty$ en $+\infty$ comme en $-\infty$

Question 3

En $+\infty$, $-2x \rightarrow -\infty$, donc par somme $h(x) \rightarrow -\infty$. En $-\infty$, $-2x \rightarrow +\infty$, donc $h(x) \rightarrow +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} h = +\infty$

À retenir : pour un polynôme, la limite en $\pm\infty$ est celle de son terme de plus haut degré.

Exercice 2 (★) : fractions rationnelles

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$:

$$1. f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$$

$$2. g(x) = \frac{x^2+1}{3x^2-x}$$

$$3. h(x) = \frac{x^3+1}{x^2+x}$$

$$4. k(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$$

Correction de l'exercice 2

Méthode. Dans chaque cas, on met en facteur le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur (pour x assez grand en valeur absolue, pour que les dénominateurs soient non nuls).

Question 1

$$f(x) = \frac{x \left(2 + \frac{1}{x} \right)}{x \left(1 - \frac{3}{x} \right)} = \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x}}$$

Quand $x \rightarrow \pm\infty$, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, donc le numérateur tend vers 2 et le dénominateur vers 1 (non nul). Par quotient :

$\lim f = 2$ en $+\infty$ et en $-\infty$

Question 2

$$g(x) = \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(3 - \frac{1}{x} \right)} = \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{3 - \frac{1}{x}}$$

Le numérateur tend vers 1 et le dénominateur vers 3. Par quotient :

$$\lim g = \frac{1}{3} \text{ en } +\infty \text{ et en } -\infty$$

Question 3

$$h(x) = \frac{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = x \times \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{1}{x}}$$

Le quotient $\frac{1 + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{1}{x}}$ tend vers 1 (par quotient). Par produit avec x :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h = -\infty$$

Question 4

$$k(x) = \frac{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1 + \frac{2}{x}}{x \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}$$

Le numérateur tend vers 1 et le dénominateur tend vers $\pm\infty$. Par quotient :

$$\lim k = 0 \text{ en } +\infty \text{ et en } -\infty$$

Règle : degré du numérateur plus petit : limite 0 ; degrés égaux : quotient des coefficients dominants ; degré du numérateur plus grand : $\pm\infty$ (avec la règle des signes).

Exercice 3 (★★) : la quantité conjuguée

1. En $+\infty$: $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

2. En $+\infty$: $g(x) = \sqrt{x^2+x} - x$

3. En $+\infty$: $h(x) = x - \sqrt{x^2+1}$

4. En $-\infty$: $k(x) = \sqrt{x^2+1} + x$

Correction de l'exercice 3

Méthode. Dans les quatre cas, on est dans la forme indéterminée « $+\infty - \infty$ ». On multiplie et on divise par la quantité conjuguée (strictement positive dans chaque cas au voisinage de l'infini considéré).

Question 1

Pour tout $x > 0$:

$$f(x) = \frac{(x+1) - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

Le dénominateur tend vers $+\infty$, donc, par quotient :

$$\lim f = 0$$

Question 2

Pour tout $x > 0$:

$$g(x) = \frac{(x^2 + x) - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x}$$

Comme $x > 0$, on divise le numérateur et le dénominateur par $x = \sqrt{x^2}$:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1}$$

Quand $x \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, donc $\sqrt{1 + \frac{1}{x}} \rightarrow 1$ par composition. Par somme et quotient :

$$\lim g = \frac{1}{2}$$

Question 3

Pour tout $x > 0$:

$$h(x) = \frac{x^2 - (x^2 + 1)}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

Le dénominateur tend vers $+\infty$, donc :

$$\lim h = 0$$

Question 4

Pour tout $x < 0$:

$$k(x) = \frac{(x^2 + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$$

Quand $x \rightarrow -\infty$, $-x \rightarrow +\infty$ et $\sqrt{x^2 + 1} \rightarrow +\infty$, donc par somme le dénominateur tend vers $+\infty$. Par quotient :

$$\lim k = 0$$

À retenir : la conjuguée de $a - b$ est $a + b$, et leur produit vaut $a^2 - b^2$. C'est ce qui fait disparaître les racines carrées.

Exercice 4 (★★) : le piège de $\sqrt{x^2}$

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de :

$$1. f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$$

$$2. g(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4x}}{x + 1}$$

Correction de l'exercice 4

Question 1

Pour tout $x \neq 0$:

$$\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$

En $+\infty$, $x > 0$ donc $|x| = x$, et $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$. Comme $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$, par composition :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 1$$

En $-\infty$, $x < 0$ donc $|x| = -x$, et $f(x) = \frac{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = -\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$. Par composition et par produit :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -1$$

Question 2

La fonction g est définie au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$: $x^2 + 4x \geq 0$ pour $x \geq 0$ et pour $x \leq -4$. Pour x assez grand en valeur absolue :

$$\sqrt{x^2 + 4x} = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{4}{x}\right)} = |x| \sqrt{1 + \frac{4}{x}}$$

En $+\infty$: $|x| = x$ et

$$g(x) = \frac{x \sqrt{1 + \frac{4}{x}}}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{\sqrt{1 + \frac{4}{x}}}{1 + \frac{1}{x}}$$

Par composition, le numérateur tend vers 1, le dénominateur vers 1. Par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g = 1$$

En $-\infty$: $|x| = -x$ et

$$g(x) = \frac{-x \sqrt{1 + \frac{4}{x}}}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = -\frac{\sqrt{1 + \frac{4}{x}}}{1 + \frac{1}{x}}$$

Par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g = -1$$

À retenir : quand on sort un x de sous la racine, on sort $|x|$. En $-\infty$, $|x| = -x$, et le signe de la limite change.

Exercice 5 (★★) : avec l'exponentielle

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$:

1. $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$

2. $g(x) = \frac{2e^x + 1}{e^x + 3}$

3. $h(x) = 3 - e^{-x}$

Correction de l'exercice 5

Question 1

La fonction f est définie pour $x \neq 0$.

En $+\infty$: pour $x > 0$, on divise le numérateur et le dénominateur par $e^x > 0$:

$$f(x) = \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}}$$

Comme $e^{-x} \rightarrow 0$ (composition), le numérateur tend vers 1 et le dénominateur vers 1 (non nul). Par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 1$$

En $-\infty$: $e^x \rightarrow 0$, donc le numérateur tend vers 1 et le dénominateur vers -1 (non nul). Par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -1$$

Question 2

En $+\infty$: $g(x) = \frac{2 + e^{-x}}{1 + 3e^{-x}}$. Comme $e^{-x} \rightarrow 0$, le numérateur tend vers 2 et le dénominateur vers 1. Par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g = 2$$

En $-\infty$: $e^x \rightarrow 0$, donc le numérateur tend vers 1 et le dénominateur vers 3. Par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g = \frac{1}{3}$$

Question 3

En $+\infty$: $e^{-x} \rightarrow 0$, donc, par somme :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h = 3$$

En $-\infty$: $-x \rightarrow +\infty$, donc $e^{-x} \rightarrow +\infty$ (composition), et par somme :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h = -\infty$$

Astuce : en $+\infty$, on divise « en haut et en bas » par e^x pour faire apparaître e^{-x} , qui tend vers 0.

Exercice 6 (★★) : asymptote et position relative

Soit $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 + 2}$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. En déduire une asymptote.
2. Étudier la position relative de la courbe et de cette asymptote.

Correction de l'exercice 6

Question 1

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ car $x^2 + 2 > 0$. Pour tout $x \neq 0$:

$$f(x) = \frac{x^2 \left(3 + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)} = \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x^2}}$$

Quand $x \rightarrow \pm\infty$, $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$, donc le numérateur tend vers 3 et le dénominateur vers 1. Par quotient :

$\lim f = 3$ en $+\infty$ et en $-\infty$

Conséquence : la droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à la courbe, en $+\infty$ et en $-\infty$.

Question 2

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) - 3 = \frac{3x^2 + 1 - 3(x^2 + 2)}{x^2 + 2} = \frac{3x^2 + 1 - 3x^2 - 6}{x^2 + 2} = \frac{-5}{x^2 + 2}$$

Comme $x^2 + 2 > 0$, on a $f(x) - 3 < 0$ pour tout x .

La courbe est strictement en dessous de son asymptote.

Exercice 7 (★★) : limites de composées**Déterminer :**

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2}$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1/x}$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^x}$

Correction de l'exercice 7

Question 1

Quand $x \rightarrow +\infty$, $-x^2 \rightarrow -\infty$. Comme $\lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$, par composition :

$$\lim e^{-x^2} = 0$$

Question 2

Quand $x \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, donc $1 + \frac{1}{x} \rightarrow 1$. Comme $\lim_{y \rightarrow 1} \sqrt{y} = 1$, par composition :

$$\lim \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

Question 3

Quand $x \rightarrow -\infty$, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$. Comme $\lim_{y \rightarrow 0} e^y = e^0 = 1$, par composition :

$$\lim e^{1/x} = 1$$

Question 4

Quand $x \rightarrow +\infty$, $e^x \rightarrow +\infty$, donc $1 + e^x \rightarrow +\infty$. Par quotient :

$$\lim \frac{1}{1 + e^x} = 0$$

Exercice 8 (★★★) : retour à la définition

1. Soit $f(x) = x^2 - 3x$. Déterminer un réel A_0 tel que, pour tout $x \geq A_0$, $f(x) \geq 10^6$. Que peut-on en déduire ?

2. Soit $g(x) = 2 + \frac{1}{x}$. Déterminer un réel B_0 tel que, pour tout $x \geq B_0$, $|g(x) - 2| < 10^{-3}$. Que peut-on en déduire ?

Correction de l'exercice 8

Question 1

Pour tout x , $f(x) = x(x - 3)$. Soit $x \geq 1003$. Alors $x \geq 1003$ et $x - 3 \geq 1000$, ces nombres étant positifs, donc :

$$f(x) \geq 1003 \times 1000 = 1\,003\,000 \geq 10^6$$

On peut donc prendre $A_0 = 1003$. Le même raisonnement fonctionne pour n'importe quel seuil : $f(x)$ devient aussi grand qu'on veut.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Question 2

Pour $x > 0$, $|g(x) - 2| = \left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{x}$.

On a $\frac{1}{x} < 10^{-3} \iff x > 1000$.

On peut donc prendre $B_0 = 1001$: pour tout $x \geq 1001$, $|g(x) - 2| < 10^{-3}$.

Le raisonnement fonctionne pour n'importe quelle précision : $g(x)$ se rapproche de 2 autant qu'on veut.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2$.

Ce qui peut tomber au bac sur les limites en l'infini

- Des limites de **polynômes et de fractions rationnelles** (exercices 1, 2, 6).
- Une **forme indéterminée avec racine** (exercices 3 et 4).
- Des limites avec **exponentielle** en $\pm\infty$ (exercice 5), souvent dans une étude de fonction complète.
- Une **asymptote horizontale** avec position relative (exercice 6).
- Des **compositions** de limites (exercice 7).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Quelle est la limite de $x^2 - 3x$ quand $x \rightarrow +\infty$?

- A. 0
- B. $-\infty$
- C. -3
- D. $+\infty$ (bonne réponse)

Justification : $x^2 - 3x = x^2 \left(1 - \frac{3}{x}\right)$ et $x^2 \rightarrow +\infty$.

2. Quelle est la limite de $\frac{2x+1}{x-3}$ quand $x \rightarrow +\infty$?

A. 2 (bonne réponse)

B. 0

C. $+\infty$

D. $-\frac{1}{3}$

Justification : On divise par x : $\frac{2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x}} \rightarrow 2$.

3. Quelle est la limite de e^x quand $x \rightarrow -\infty$?

A. 0 (bonne réponse)

B. $+\infty$

C. 1

D. $-\infty$

Justification : $e^x > 0$ et $e^x \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow -\infty$.

4. Quelle est la limite de $\frac{1}{x^2}$ quand $x \rightarrow +\infty$?

A. 0 (bonne réponse)

B. $+\infty$

C. 1

D. La limite n'existe pas

Justification : L'inverse d'une quantité qui tend vers $+\infty$ tend vers 0.

5. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, la courbe de f admet :

A. aucune asymptote

B. une asymptote oblique

C. la droite $x = b$ comme asymptote verticale

D. la droite $y = b$ comme asymptote horizontale (bonne réponse)

Justification : Une limite finie b en $+\infty$ donne l'asymptote horizontale d'équation $y = b$.

6. Dans l'exercice 2, quelle est la limite en $+\infty$ de $h(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + x}$?

A. $-\infty$

B. 0

C. $+\infty$ (bonne réponse)

D. 1

Justification : On simplifie par les termes de plus haut degré : $h(x) \sim \frac{x^3}{x^2} = x \rightarrow +\infty$.

7. Dans l'exercice 3, quelle est la limite en $+\infty$ de $g(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$?

- A. 1
- B. $+\infty$
- C. 0
- D. $\frac{1}{2}$ (bonne réponse)

Justification : En multipliant par la quantité conjuguée : $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} \rightarrow \frac{1}{2}$.

8. Dans l'exercice 4, quelle est la limite en $-\infty$ de $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$?

- A. 1
- B. $+\infty$
- C. 0
- D. -1 (bonne réponse)

Justification : Pour $x < 0$, $\sqrt{x^2 + 1} = |x|\sqrt{1 + 1/x^2} = -x\sqrt{1 + 1/x^2}$, donc $f(x) \rightarrow -1$.

9. Dans l'exercice 6, quelle est l'asymptote de $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 + 2}$ en $+\infty$ et en $-\infty$?

- A. la droite d'équation $y = 3$ (bonne réponse)
- B. il n'y a pas d'asymptote
- C. la droite d'équation $x = 3$
- D. la droite d'équation $y = 0$

Justification : $\lim f = 3$ en $+\infty$ comme en $-\infty$: la droite $y = 3$ est asymptote horizontale des deux côtés.

10. Dans l'exercice 8, pour $f(x) = x^2 - 3x$, on cherche A_0 tel que $f(x) \geq 10^6$ pour $x \geq A_0$. Cela sert à prouver que :

- A. $f(0) = 0$
- B. f est continue
- C. f est croissante
- D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (bonne réponse)

Justification : C'est la définition de la limite infinie en $+\infty$: pour tout seuil, on trouve un rang à partir duquel f le dépasse.