

Contrôle : chapitre 2, Limites de fonctions

Durée : 60 minutes. **Calculatrice** : autorisée. **Barème** : 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (6 points) : Calculs de limites

Dans chaque question, déterminer la limite demandée en **justifiant** (transformation d'écriture, puis théorèmes sur les opérations ou sur les limites de fonctions composées).

1. Soit $f(x) = -2x^3 + 5x^2 + 3$. Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis en $-\infty$. (1,5 points)
2. Soit $g(x) = \frac{4x^2 - x + 1}{2x^2 + 5}$. Déterminer la limite de g en $+\infty$. (1 point)
3. Soit $h(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. Déterminer la limite de h en 3. (1 point)
4. Soit $k(x) = \sqrt{x^2 + 3x} - x$ définie pour $x > 0$. Déterminer la limite de k en $+\infty$. (1,5 points)
5. Déterminer la limite en $+\infty$ de $m(x) = e^{-x^2+x}$. (1 point)

Exercice 2 (6 points) : Asymptotes d'une fonction rationnelle

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ par

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 4}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_f$? (1,5 points)
2. Déterminer les limites de f en 2^- , 2^+ , -2^- et -2^+ . Interpréter graphiquement. (2 points)
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$, $f(x) - 2 = \frac{7-x}{x^2-4}$. En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de la droite Δ d'équation $y = 2$, puis les coordonnées de leur éventuel point d'intersection. (2,5 points)

Exercice 3 (8 points) : Gendarmes, comparaison et concentration d'un médicament

Partie A. Pour tout réel $x > 0$, on pose $g(x) = \frac{3x + 2 \sin x}{x}$ et $h(x) = 3x + 2 \sin x$.

Partie B. Un médicament est injecté à un patient à l'instant $t = 0$. La concentration de ce médicament dans le sang, en mg/L, à l'instant t (en heures) est modélisée pour $t \geq 0$ par

$$C(t) = 20t e^{-t/2}.$$

On admet que C est croissante sur $[0; 2]$ et décroissante sur $[2; +\infty[$. On considère la fonction Python ci-dessous, à compléter (les pointillés remplacent deux expressions) :

```
from math import exp

def C(t):
    return 20 * t * exp(-t / 2)

def seuil():
    t = 2
    while ..... :
        t = .....
    return t
```

- (Partie A)** Montrer que pour tout $x > 0$, $3 - \frac{2}{x} \leq g(x) \leq 3 + \frac{2}{x}$. En déduire la limite de g en $+\infty$. (2 points)
- (Partie A)** Déterminer la limite de h en $+\infty$. (1 point)
- (Partie B)** Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = 0$. Interpréter ce résultat dans le contexte. (2 points)
- (Partie B)** Justifier qu'il existe un instant T à partir duquel la concentration reste strictement inférieure à 1 mg/L. (1 point)
- (Partie B)** Compléter la fonction `seuil` pour qu'elle renvoie le plus petit entier $t \geq 2$ tel que $C(t) < 1$. Donner la valeur renvoyée en la justifiant par des valeurs approchées, puis conclure. (2 points)