

Contrôle : chapitre 2, Limites de fonctions

Durée : 60 minutes. **Calculatrice :** autorisée. **Barème :** 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (6 points) : Calculs de limites

Dans chaque question, déterminer la limite demandée en **justifiant** (transformation d'écriture, puis théorèmes sur les opérations ou sur les limites de fonctions composées).

1. Soit $f(x) = -2x^3 + 5x^2 + 3$. Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis en $-\infty$. (1,5 points)
2. Soit $g(x) = \frac{4x^2 - x + 1}{2x^2 + 5}$. Déterminer la limite de g en $+\infty$. (1 point)
3. Soit $h(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. Déterminer la limite de h en 3. (1 point)
4. Soit $k(x) = \sqrt{x^2 + 3x} - x$ définie pour $x > 0$. Déterminer la limite de k en $+\infty$. (1,5 points)
5. Déterminer la limite en $+\infty$ de $m(x) = e^{-x^2+x}$. (1 point)

Correction de l'exercice 1, question 1

Question 1 (1,5 points)

En $+\infty$, forme indéterminée « $+\infty - \infty$ » (en $-\infty$, on procède de même). Pour tout $x \neq 0$:

$$f(x) = x^3 \left(-2 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^3} \right).$$

Quand $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$, $\frac{5}{x} \rightarrow 0$ et $\frac{3}{x^3} \rightarrow 0$, donc par somme $-2 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^3} \rightarrow -2$.

En $+\infty$, $x^3 \rightarrow +\infty$: par produit, $f(x) \rightarrow -\infty$. En $-\infty$, $x^3 \rightarrow -\infty$: par produit (règle des signes), $f(x) \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

Barème : 0,5 point pour la factorisation par le terme de plus haut degré ; 0,5 point pour la limite en $+\infty$ justifiée ; 0,5 point pour la limite en $-\infty$ justifiée (parité de l'exposant).

Correction de l'exercice 1, question 2

Question 2 (1 point)

Forme indéterminée « $\frac{+\infty}{+\infty}$ ». Pour tout $x \neq 0$: $g(x) = \frac{x^2 \left(4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(2 + \frac{5}{x^2} \right)} = \frac{4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{5}{x^2}}$.

Quand $x \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$ et $\frac{5}{x^2} \rightarrow 0$. Par somme puis par quotient (dénominateur de limite $2 \neq 0$) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{4}{2} = 2.$$

Barème : 0,5 point pour la factorisation et la simplification ; 0,5 point pour la limite avec les théorèmes cités.

Correction de l'exercice 1, question 3

Question 3 (1 point)

Le numérateur et le dénominateur tendent vers 0 : forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ».

Pour tout $x \neq 3$: $h(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6.$$

Barème : 0,5 point pour la factorisation et la simplification par $x-3$ (avec $x \neq 3$) ; 0,5 point pour la limite.

Correction de l'exercice 1, question 4

Question 4 (1,5 points)

Forme indéterminée « $+\infty - \infty$ ». On multiplie par la quantité conjuguée (non nulle, car positive) : pour tout $x > 0$,

$$k(x) = \frac{(x^2 + 3x) - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x}.$$

$$\text{Pour } x > 0, \sqrt{x^2 + 3x} = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{3}{x} \right)} = x \sqrt{1 + \frac{3}{x}}, \text{ d'où } k(x) = \frac{3x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1 \right)} = \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1}.$$

Quand $x \rightarrow +\infty$, $1 + \frac{3}{x} \rightarrow 1$, donc par composition $\sqrt{1 + \frac{3}{x}} \rightarrow 1$, puis par somme et quotient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \frac{3}{2}.$$

Barème : 0,5 point pour l'expression conjuguée ; 0,5 point pour la mise en facteur de x (avec $x > 0$) et la simplification ; 0,5 point pour la limite.

Correction de l'exercice 1, question 5

Question 5 (1 point)

Pour tout $x \neq 0$: $-x^2 + x = x^2 \left(-1 + \frac{1}{x}\right)$. Quand $x \rightarrow +\infty$, $x^2 \rightarrow +\infty$ et $-1 + \frac{1}{x} \rightarrow -1$, donc par produit $-x^2 + x \rightarrow -\infty$.

Or $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$. Par composition :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} m(x) = 0.$$

Barème : 0,5 point pour la limite de $-x^2 + x$ en $+\infty$ justifiée ; 0,5 point pour la composition avec l'exponentielle.

Exercice 2 (6 points) : Asymptotes d'une fonction rationnelle

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ par

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 4}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_f$? (1,5 points)
- Déterminer les limites de f en 2^- , 2^+ , -2^- et -2^+ . Interpréter graphiquement. (2 points)
- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$, $f(x) - 2 = \frac{7-x}{x^2-4}$. En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de la droite Δ d'équation $y = 2$, puis les coordonnées de leur éventuel point d'intersection. (2,5 points)

Correction de l'exercice 2, question 1

Question 1 (1,5 points)

$$\text{Pour tout } x \notin \{-2; 0; 2\} : f(x) = \frac{x^2 \left(2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)} = \frac{2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}}.$$

Quand $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ et $\frac{4}{x^2}$ tendent vers 0. Par somme puis par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2.$$

Conséquence : la droite d'équation $y = 2$ est **asymptote horizontale** à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Barème : 0,5 point pour la factorisation et la simplification ; 0,5 point pour les deux limites ; 0,5 point pour l'asymptote horizontale $y = 2$ déduite des limites.

Correction de l'exercice 2, question 2

Question 2 (2 points)

Le numérateur $2x^2 - x - 1$ tend vers $2 \times 4 - 2 - 1 = 5 > 0$ quand $x \rightarrow 2$, et vers $2 \times 4 + 2 - 1 = 9 > 0$ quand $x \rightarrow -2$.

Le dénominateur $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ s'annule en 2 et en -2 ; il est **positif** pour $x < -2$ et pour $x > 2$, **négatif** pour $-2 < x < 2$.

En 2^+ : $x^2 - 4 \rightarrow 0^+$, donc par quotient $f(x) \rightarrow +\infty$. En 2^- : $x^2 - 4 \rightarrow 0^-$, donc $f(x) \rightarrow -\infty$.

En -2^- : $x < -2$ donc $x^2 - 4 \rightarrow 0^+$ et $f(x) \rightarrow +\infty$. En -2^+ : $-2 < x$ donc $x^2 - 4 \rightarrow 0^-$ et $f(x) \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f = +\infty ; \lim_{x \rightarrow 2^-} f = -\infty ; \lim_{x \rightarrow -2^-} f = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -2^+} f = -\infty.$$

Conséquence : les droites d'équations $x = 2$ et $x = -2$ sont **asymptotes verticales** à $\mathcal{C}_f$.

Barème : 0,5 point pour les limites du numérateur (5 et 9) ; 1 point pour le signe du dénominateur de chaque côté et les quatre limites ; 0,5 point pour les deux asymptotes verticales.

Correction de l'exercice 2, question 3

Question 3 (2,5 points)

$$f(x) - 2 = \frac{2x^2 - x - 1 - 2(x^2 - 4)}{x^2 - 4} = \frac{2x^2 - x - 1 - 2x^2 + 8}{x^2 - 4} = \frac{7 - x}{x^2 - 4}.$$

On étudie le signe de ce quotient (le numérateur s'annule en 7, le dénominateur est positif sur $] - \infty ; -2[$ et sur $]2 ; +\infty[$, négatif sur $] - 2 ; 2[$) :

x	$] -\infty ; -2[$	$] -2 ; 2[$	$] 2 ; 7[$	7	$] 7 ; +\infty[$
$7 - x$	+	+	+	0	−
$x^2 - 4$	+	−	+	+	+
$f(x) - 2$	+	−	+	0	−

Position : $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de Δ sur $] -\infty ; -2[$ et sur $] 2 ; 7[$; **en dessous** de Δ sur $] -2 ; 2[$ et sur $] 7 ; +\infty[$.

$\mathcal{C}_f$ coupe Δ en un seul point, d'abscisse 7 : $A(7 ; 2)$.

Vérification : $f(7) = \frac{2 \times 49 - 7 - 1}{49 - 4} = \frac{90}{45} = 2$.

Barème : 0,5 point pour la démonstration de $f(x) - 2 = \frac{7 - x}{x^2 - 4}$; 1 point pour le tableau de signes correct ; 0,5 point pour les positions relatives sur chaque intervalle ; 0,5 point pour le point d'intersection $A(7 ; 2)$.

Exercice 3 (8 points) : Gendarmes, comparaison et concentration d'un médicament

Partie A. Pour tout réel $x > 0$, on pose $g(x) = \frac{3x + 2 \sin x}{x}$ et $h(x) = 3x + 2 \sin x$.

Partie B. Un médicament est injecté à un patient à l'instant $t = 0$. La concentration de ce médicament dans le sang, en mg/L, à l'instant t (en heures) est modélisée pour $t \geq 0$ par

$$C(t) = 20t e^{-t/2}.$$

On admet que C est croissante sur $[0; 2]$ et décroissante sur $[2; +\infty[$. On considère la fonction Python ci-dessous, à compléter (les pointillés remplacent deux expressions) :

```
from math import exp

def C(t):
    return 20 * t * exp(-t / 2)

def seuil():
    t = 2
    while ..... :
        t = .....
    return t
```

- (Partie A)** Montrer que pour tout $x > 0$, $3 - \frac{2}{x} \leq g(x) \leq 3 + \frac{2}{x}$. En déduire la limite de g en $+\infty$. (2 points)
- (Partie A)** Déterminer la limite de h en $+\infty$. (1 point)
- (Partie B)** Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = 0$. Interpréter ce résultat dans le contexte. (2 points)
- (Partie B)** Justifier qu'il existe un instant T à partir duquel la concentration reste strictement inférieure à 1 mg/L. (1 point)
- (Partie B)** Compléter la fonction `seuil` pour qu'elle renvoie le plus petit entier $t \geq 2$ tel que $C(t) < 1$. Donner la valeur renvoyée en la justifiant par des valeurs approchées, puis conclure. (2 points)

Correction de l'exercice 3, question 1

Question 1 (2 points)

Pour tout réel x , $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc $-2 \leq 2 \sin x \leq 2$ et $3x - 2 \leq 3x + 2 \sin x \leq 3x + 2$.

On divise par $x > 0$ (le sens des inégalités est conservé) : $3 - \frac{2}{x} \leq \frac{3x + 2 \sin x}{x} \leq 3 + \frac{2}{x}$,
c'est-à-dire $3 - \frac{2}{x} \leq g(x) \leq 3 + \frac{2}{x}$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{2}{x}\right) = 3$.

D'après le **théorème des gendarmes** (encadrement par deux fonctions de même limite) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 3.$$

Barème : 1 point pour l'encadrement de $\sin x$ puis de $g(x)$ (division par $x > 0$) ; 0,5 point pour les limites des deux bornes ; 0,5 point pour le théorème des gendarmes cité et la conclusion.

Correction de l'exercice 3, question 2

Question 2 (1 point)

Pour tout x , $\sin x \geq -1$ donc $h(x) = 3x + 2 \sin x \geq 3x - 2$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - 2) = +\infty$. D'après le **théorème de comparaison** (minoration) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty.$$

Barème : 0,5 point pour la minoration $h(x) \geq 3x - 2$; 0,5 point pour le théorème de comparaison et la conclusion.

Correction de l'exercice 3, question 3

Question 3 (2 points)

Pour tout $t \geq 0$: $C(t) = 40 \times \frac{t}{2} e^{-t/2}$. On pose $X = \frac{t}{2}$; quand $t \rightarrow +\infty$, $X \rightarrow +\infty$, et $C(t) = 40 X e^{-X}$.

Par croissances comparées, $\lim_{X \rightarrow +\infty} X e^{-X} = 0$ (c'est-à-dire $\frac{X}{e^X} \rightarrow 0$). Par composition puis produit par 40 :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = 0.$$

Interprétation : au bout d'un temps très long, le médicament est éliminé : sa concentration dans le sang se rapproche de 0 mg/L.

Barème : 1 point pour le changement de variable ou la mise en forme $40X e^{-X}$; 0,5 point pour les croissances comparées citées ; 0,5 point pour la conclusion et l'interprétation.

Correction de l'exercice 3, question 4

Question 4 (1 point)

Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = 0$, l'intervalle ouvert $] -1 ; 1[$ contient 0 : par définition de la limite, il contient toutes les valeurs $C(t)$ pour t assez grand.

Il existe donc un réel T tel que, pour tout $t \geq T$, $C(t) < 1$.

Barème : 1 point pour l'utilisation de la définition de la limite (intervalle ouvert contenant 0, t assez grand).

Correction de l'exercice 3, question 5

Question 5 (2 points)

Il faut continuer tant que la concentration est supérieure ou égale à 1 :

```
from math import exp

def C(t):
    return 20 * t * exp(-t / 2)

def seuil():
    t = 2
    while C(t) >= 1 :
        t = t + 1
    return t
```

À la calculatrice : $C(10) = 200 e^{-5} \approx 1,35 \geq 1$ et $C(11) = 220 e^{-5,5} \approx 0,90 < 1$; les valeurs $C(2), \dots, C(10)$ sont supérieures ou égales à 1 puisque C est décroissante sur $[2; +\infty[$ et $C(10) \geq 1$.

`seuil()` renvoie 11.

Comme C est décroissante sur $[2; +\infty[$, pour tout $t \geq 11$, $C(t) \leq C(11) < 1$: la concentration est strictement inférieure à 1 mg/L à partir de l'instant $t = 11$ heures, et le reste ensuite.

Barème : 1 point pour la condition de boucle $C(t) \geq 1$ et l'incrément $t + 1$; 1 point pour la valeur 11 justifiée par $C(10)$ et $C(11)$, avec la conclusion (décroissance).

Récapitulatif du barème

Exercice	Points
Exercice 1	6
Exercice 2	6
Exercice 3	8
Total	20