

Sommes de variables aléatoires et concentration : le cours

Le dernier chapitre du programme répond à une question très naturelle : **que se passe-t-il quand on répète une expérience un grand nombre de fois ?** La moyenne des résultats se stabilise. Ce chapitre explique pourquoi, et surtout **avec quelle précision**.

Trois idées, dans l'ordre :

- l'**espérance** et la **variance** d'une somme de variables aléatoires ;
- l'**inégalité de Bienaymé-Tchebychev**, qui contrôle l'écart à l'espérance ;
- la **loi des grands nombres**, qui en découle.

Dans tout le cours, tu verras des astuces , des pièges et un peu d'humour .

Comment utiliser ce cours

- Lis une partie, puis fais tout de suite la fiche correspondante.
- Retiens le fil rouge du chapitre : **l'espérance s'additionne toujours, la variance s'additionne seulement pour des variables indépendantes**.
- Pour une inégalité de concentration, **écris toujours** : la variable, son espérance, sa variance, le δ choisi.

1. Espérance, variance, écart-type

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, \dots, x_r$ avec les probabilités $p_1, \dots, p_r$.

- **Espérance** : $E(X) = \sum_{i=1}^r p_i x_i$ (la valeur moyenne).
- **Variance** : $V(X) = \sum_{i=1}^r p_i (x_i - E(X))^2$ (l'écart quadratique moyen à l'espérance).
- **Écart-type** : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Formule de König-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \quad \text{avec} \quad E(X^2) = \sum_{i=1}^r p_i x_i^2$$

C'est souvent le calcul le plus rapide.

Transformation affine. Pour a et b réels :

$$E(aX + b) = a E(X) + b \quad V(aX + b) = a^2 V(X) \quad \sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$$

La variable $Z = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est **centrée réduite** : $E(Z) = 0$ et $V(Z) = 1$.

Pièges :

- $V(aX + b) = a^2 V(X)$: la constante b **ne compte pas**, et a est **au carré**.
- $\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$: une **valeur absolue**, jamais un signe moins.
- Une variance est **toujours positive** : si tu trouves une variance négative, tu as fait une erreur (souvent oublier de soustraire $E(X)^2$ correctement).

2. Somme de variables aléatoires

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers.

Linéarité de l'espérance. Pour a et b réels :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \quad E(aX + bY) = a E(X) + b E(Y)$$

Cela vaut **toujours**, que X et Y soient indépendantes ou non.

3. Indépendance de variables aléatoires

Deux variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** si, pour toutes valeurs x_i de X et y_j de Y :

$$P(X = x_i \text{ et } Y = y_j) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j)$$

Variance d'une somme. Si X et Y sont **indépendantes** :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) \quad \text{et aussi} \quad V(X - Y) = V(X) + V(Y)$$

Plus généralement, pour n variables **indépendantes** $X_1, \dots, X_n$: $V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n)$.

Pièges :

- Sans indépendance, $V(X + Y) \neq V(X) + V(Y)$ en général. Exemple : X de Bernoulli et $Y = 1 - X$ donnent $X + Y = 1$, de variance 0.
- $V(X - Y) = V(X) + V(Y)$: les variances **s'additionnent** aussi pour une différence.
- **Ne confonds pas** les variances (qui s'additionnent) et les écarts-types (qui ne s'additionnent pas : $\sigma(X + Y) = \sqrt{V(X) + V(Y)}$).

L'espérance est généreuse : elle s'additionne sans poser de questions. La variance est méfiante : elle ne s'additionne que si les variables ne se parlent pas.

4. Loi de Bernoulli et loi binomiale

Une variable X de **Bernoulli** de paramètre p prend la valeur 1 (avec la probabilité p) ou 0 (avec la probabilité $1 - p$).

$$E(X) = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p \quad V(X) = E(X^2) - p^2 = p - p^2 = p(1 - p)$$

Une variable X de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ est la **somme** de n variables de Bernoulli **indépendantes** de paramètre p : $X = X_1 + \dots + X_n$.

Démonstration de $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$.

Par linéarité : $E(X) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = np$.

Par indépendance : $V(X) = V(X_1) + \dots + V(X_n) = np(1 - p)$.

5. Échantillon, somme, moyenne

Un **échantillon de taille n** de la variable X est une liste $(X_1, \dots, X_n)$ de variables **indépendantes** qui suivent toutes la même loi que X . On note :

$$S_n = X_1 + \dots + X_n \quad M_n = \frac{S_n}{n}$$

	Somme S_n	Moyenne $M_n = \frac{S_n}{n}$
Espérance	$E(S_n) = n E(X)$	$E(M_n) = E(X)$
Variance	$V(S_n) = n V(X)$	$V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$
Écart-type	$\sigma(S_n) = \sigma(X)\sqrt{n}$	$\sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Cela explique le principe fondamental : **la moyenne d'un échantillon est moins dispersée que chaque observation**. Son écart-type est divisé par $\sqrt{n}$.

6. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème. Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance $V(X)$. Pour tout réel $\delta > 0$:

$$P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$$

Pourquoi ? Pour tout résultat, $(X - \mu)^2 \geq \delta^2$ lorsque $|X - \mu| \geq \delta$, et $(X - \mu)^2 \geq 0$ sinon. En prenant l'espérance : $V(X) = E((X - \mu)^2) \geq \delta^2 P(|X - \mu| \geq \delta)$.

Forme complémentaire : $P(|X - \mu| < \delta) \geq 1 - \frac{V(X)}{\delta^2}$.

Inégalité de concentration (pour la moyenne). Appliquée à M_n (d'espérance μ et de variance $\frac{V(X)}{n}$) :

$$P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n \delta^2}$$

7. Loi des grands nombres

Loi faible des grands nombres. Pour tout $\delta > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - \mu| \geq \delta) = 0$$

Preuve : d'après l'inégalité de concentration, $0 \leq P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n\delta^2} \rightarrow 0$; on conclut avec le théorème des gendarmes.

Cas d'un succès de probabilité p . La fréquence $F_n = \frac{X_n}{n}$ de succès sur n épreuves (avec $X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$) vérifie $E(F_n) = p$ et $V(F_n) = \frac{p(1-p)}{n}$. Donc :

$$P(|F_n - p| \geq \delta) \leq \frac{p(1-p)}{n\delta^2} \leq \frac{1}{4n\delta^2} \quad \left(\text{car } p(1-p) \leq \frac{1}{4} \right)$$

Dimensionner un échantillon. Pour garantir $P(|F_n - p| < \delta) \geq 1 - \alpha$, il suffit que $\frac{1}{4n\delta^2} \leq \alpha$, c'est-à-dire $n \geq \frac{1}{4\alpha\delta^2}$. Avec $\delta = 0,01$ et $\alpha = 0,05$: $n \geq 50\,000$.

Pièges :

- Bienaymé-Tchebychev donne une **majoration**, souvent large : elle ne donne pas la probabilité exacte.
- L'inégalité est **vide de sens** quand $\frac{V(X)}{\delta^2} \geq 1$ (une probabilité est toujours ≤ 1).
- La loi des grands nombres parle d'une **probabilité** qui tend vers 0, pas d'une certitude.

8. Python

```
import random

def esperance(valeurs, probas):
    return sum(x * p for x, p in zip(valeurs, probas))

def variance(valeurs, probas):
    m = esperance(valeurs, probas)
    return sum(p * (x - m)**2 for x, p in zip(valeurs, probas))

def moyenne_des(n):
    return sum(random.randint(1, 6) for _ in range(n)) / n
```

`moyenne_des(100000)` renvoie une valeur proche de 3,5 : c'est la loi des grands nombres. Relance plusieurs fois : les résultats varient peu.

9. Les 10 pépites du chapitre

1. $E(X) = \sum p_i x_i$; $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
2. $V(aX + b) = a^2 V(X)$: le b disparaît, le a est au carré.
3. **L'espérance s'additionne toujours** : $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
4. **La variance s'additionne** seulement pour des variables **indépendantes**.
5. $V(X - Y) = V(X) + V(Y)$ pour des variables indépendantes.
6. **Bernoulli** : $E = p$, $V = p(1 - p)$. **Binomiale** : $E = np$, $V = np(1 - p)$.
7. **Moyenne d'un échantillon** : $\sigma(M_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.
8. **Bienaymé-Tchebychev** : $P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$.
9. **Concentration** : $P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n\delta^2}$.
10. **Dimensionner** : $n \geq \frac{V(X)}{\alpha \delta^2}$ (ou $\frac{1}{4\alpha \delta^2}$ pour une fréquence).

Complément du programme : pourquoi $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

Pour deux variables **indépendantes**, on admet que $E(XY) = E(X)E(Y)$. On en déduit la formule de la variance d'une somme.

Démonstration. On développe $V(X + Y) = E((X + Y)^2) - (E(X) + E(Y))^2$:

$$V(X + Y) = E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - E(X)^2 - 2E(X)E(Y) - E(Y)^2$$

On regroupe : $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2[E(XY) - E(X)E(Y)]$.

Par indépendance, le crochet est nul. Donc $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$. $\square$

Sans indépendance, il reste le terme $2[E(XY) - E(X)E(Y)]$, qu'on appelle **covariance** (hors programme).

10. Ce qui peut tomber au bac

- L'espérance, la variance, l'écart-type, la transformation affine (fiche 1).
- Les sommes de variables, l'indépendance et la loi binomiale comme somme (fiche 2).
- L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à une variable ou à une loi binomiale (fiche 3).
- La loi des grands nombres, l'échantillonnage et la simulation avec Python (fiche 4 et exercices type bac).

Tu as maintenant le cours. Passe aux quatre fiches, aux exercices type bac, puis au Guide de rédaction du chapitre.