

Sommes de variables aléatoires et concentration : exercices type bac

Trois exercices complets, dans le style de l'épreuve du bac :

- un jeu de kermesse : loi de gain, espérance, variance, somme de 1 000 parties et inégalité de Bienaymé-Tchebychev ;
- un lot de puces : loi binomiale, inégalité de concentration pour une fréquence, taille d'échantillon, Python ;
- un système de composants : loi binomiale, probabilité exacte comparée à la majoration.

Les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une excellente copie de bac :

- lois et paramètres justifiés ;
- E , V , σ calculés et écrits ;
- indépendance justifiée avant d'additionner des variances ;
- inégalité citée avec μ , V , δ ;
- conclusions nuancées et en contexte.

Elles suivent le Guide de rédaction général et celui du chapitre. **Durée conseillée : 30 minutes par exercice, sur papier, sans regarder la correction.**

Comment t'entraîner efficacement

- Chronomètre-toi et rédige tout, comme le jour du bac.
- Commence par **écrire** E , V et σ de la variable étudiée.
- Avant d'additionner des variances, écris « **les parties sont indépendantes** ».
- À la fin de chaque exercice, ouvre « Points clés attendus » : c'est la liste de ce que le correcteur cherche.

Exercice 1 : un jeu de kermesse

Lors d'une kermesse, un joueur joue à un jeu dont le gain net X , en euros, a pour loi :

x_i	-2	4	10
$P(X = x_i)$	0,7	0,2	0,1

1. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$. Interpréter $E(X)$.
2. Le joueur dispute $n = 1\,000$ parties indépendantes. On note S son gain total. Calculer $E(S)$, $V(S)$ et $\sigma(S)$.
3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, minorer la probabilité que son gain total soit strictement compris entre 0 et 800 €.
4. Écrire les instructions Python qui permettent de retrouver $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 2 : un lot de puces électroniques

Une puce électronique est défectueuse avec la probabilité 0,04, indépendamment des autres.

On prélève un lot de 500 puces.

On note X le nombre de puces défectueuses et $F = \frac{X}{500}$ la fréquence.

1. Justifier que X suit une loi binomiale. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
2. Montrer que $P(10 < X < 30) \geq 0,808$.
3. Calculer $E(F)$ et $V(F)$. Majorer $P(|F - 0,04| \geq 0,02)$.
4. Quelle taille de lot n garantit que F_n diffère de 0,04 de moins de 0,01 avec une probabilité d'au moins 0,95 ?
5. Le script suivant calcule $P(|X - 20| \geq 10)$:

```
from math import comb

def exacte(n, p, ecart):
    return sum(comb(n, k) * p**k * (1 - p)**(n - k)
               for k in range(n + 1) if abs(k - n*p) >= ecart)
```

Il renvoie environ 0.0293 pour `exacte(500, 0.04, 10)`. Comparer avec la majoration de la question 2.

Exercice 3 : un système de composants

Un satellite est équipé de **20** composants identiques qui fonctionnent indépendamment les uns des autres, chacun avec la probabilité **0,95**.

Soit N le nombre de composants qui fonctionnent.

Le satellite est opérationnel si au moins **18** composants fonctionnent.

1. Justifier que N suit une loi binomiale et calculer $E(N)$, $V(N)$ et $\sigma(N)$.
2. Calculer la probabilité que tous les composants fonctionnent.
3. Calculer la probabilité que le satellite soit opérationnel.
4. Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, minorer $P(18 \leq N \leq 20)$.
5. Comparer avec la valeur trouvée à la question 3.

Les réflexes à retenir

- **Additionne les variances** seulement après avoir **justifié l'indépendance**.
- Écris μ , V et δ **avant** d'appliquer Bienaymé-Tchebychev.
- **Traduis** les événements en valeur absolue : « strictement entre a et b » $\iff |X - \mu| < \delta$ avec $\mu = \frac{a+b}{2}$.
- Pour un **échantillon**, $V(F_n) = \frac{p(1-p)}{n} \leq \frac{1}{4n}$.
- **Nuance** tes conclusions : une majoration n'est pas la valeur exacte.

Aller plus loin avec les vrais sujets

Quand tu es à l'aise avec ce chapitre, entraîne-toi sur les exercices de probabilités des sujets officiels des années précédentes.

Ils sont disponibles sur le site de l'[APMEP](https://apmep.fr/).

Chronomètre-toi et rédige comme le jour du bac.