

Sommes de variables aléatoires et concentration : exercices type bac

Trois exercices complets, dans le style de l'épreuve du bac :

- un jeu de kermesse : loi de gain, espérance, variance, somme de 1 000 parties et inégalité de Bienaymé-Tchebychev ;
- un lot de puces : loi binomiale, inégalité de concentration pour une fréquence, taille d'échantillon, Python ;
- un système de composants : loi binomiale, probabilité exacte comparée à la majoration.

Les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une excellente copie de bac :

- lois et paramètres justifiés ;
- E , V , σ calculés et écrits ;
- indépendance justifiée avant d'additionner des variances ;
- inégalité citée avec μ , V , δ ;
- conclusions nuancées et en contexte.

Elles suivent le Guide de rédaction général et celui du chapitre. **Durée conseillée : 30 minutes par exercice, sur papier, sans regarder la correction.**

Comment t'entraîner efficacement

- Chronomètre-toi et rédige tout, comme le jour du bac.
- Commence par **écrire** E , V et σ de la variable étudiée.
- Avant d'additionner des variances, écris « **les parties sont indépendantes** ».
- À la fin de chaque exercice, ouvre « Points clés attendus » : c'est la liste de ce que le correcteur cherche.

Exercice 1 : un jeu de kermesse

Lors d'une kermesse, un joueur joue à un jeu dont le gain net X , en euros, a pour loi :

x_i	-2	4	10
$P(X = x_i)$	0,7	0,2	0,1

1. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$. Interpréter $E(X)$.
2. Le joueur dispute $n = 1\,000$ parties indépendantes. On note S son gain total. Calculer $E(S)$, $V(S)$ et $\sigma(S)$.
3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, minorer la probabilité que son gain total soit strictement compris entre 0 et 800 €.
4. Écrire les instructions Python qui permettent de retrouver $E(X)$ et $V(X)$.

Correction de la question 1

La somme des probabilités vaut $0,7 + 0,2 + 0,1 = 1$.

$$E(X) = -2 \times 0,7 + 4 \times 0,2 + 10 \times 0,1 = -1,4 + 0,8 + 1$$

$$E(X) = 0,4$$

$$E(X^2) = 4 \times 0,7 + 16 \times 0,2 + 100 \times 0,1 = 2,8 + 3,2 + 10 = 16$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 16 - 0,16$$

$$V(X) = 15,84$$

$$\sigma(X) = \sqrt{15,84} \approx 3,98$$

Interprétation : le joueur gagne en moyenne 0,40 € par partie : le jeu lui est légèrement favorable.

Correction de la question 2

$S = X_1 + X_2 + \dots + X_{1000}$ où les X_i sont les gains des parties. Les parties sont **indépendantes** et les X_i suivent la loi de X .

Par linéarité de l'espérance : $E(S) = 1\,000 \times E(X)$

$$E(S) = 400$$

Par indépendance : $V(S) = 1\,000 \times V(X)$

$$V(S) = 15\,840$$

$$\sigma(S) = \sqrt{15\,840} \approx 125,9$$

Correction de la question 3

On veut minorer $P(0 < S < 800)$. Or $0 < S < 800 \iff |S - 400| < 400$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\mu = 400$, $V = 15\,840$ et $\delta = 400$:

$$P(|S - 400| \geq 400) \leq \frac{15\,840}{400^2} = \frac{15\,840}{160\,000}$$

$$P(|S - 400| \geq 400) \leq 0,099$$

Par événement contraire :

$$P(0 < S < 800) \geq 1 - 0,099 = 0,901$$

Conclusion : avec une probabilité d'au moins 90,1 %, le joueur termine avec un gain total strictement positif.

Correction de la question 4

```
valeurs = [-2, 4, 10]
probas = [0.7, 0.2, 0.1]

E = sum(x * p for x, p in zip(valeurs, probas))
V = sum(p * (x - E)**2 for x, p in zip(valeurs, probas))
print(E, V)
```

Le script affiche environ **0.4 15.84** (aux arrondis près).

Points clés attendus pour l'exercice 1

- **Q1** : $E(X)$, $E(X^2)$, König-Huygens, écart-type, **interprétation** en contexte.
- **Q2** : **indépendance des parties justifiée**, linéarité pour $E(S)$, additivité de la variance pour $V(S)$.
- **Q3** : traduction de « strictement compris entre 0 et 800 » en $|S - 400| < 400$; inégalité citée avec μ , V , δ ; événement contraire.
- **Q4** : script correct pour E et V .

Exercice 2 : un lot de puces électroniques

Une puce électronique est défectueuse avec la probabilité 0,04, indépendamment des autres.

On prélève un lot de 500 puces.

On note X le nombre de puces défectueuses et $F = \frac{X}{500}$ la fréquence.

1. Justifier que X suit une loi binomiale. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
2. Montrer que $P(10 < X < 30) \geq 0,808$.
3. Calculer $E(F)$ et $V(F)$. Majorer $P(|F - 0,04| \geq 0,02)$.
4. Quelle taille de lot n garantit que F_n diffère de 0,04 de moins de 0,01 avec une probabilité d'au moins 0,95 ?
5. Le script suivant calcule $P(|X - 20| \geq 10)$:

```
from math import comb

def exacte(n, p, ecart):
    return sum(comb(n, k) * p**k * (1 - p)**(n - k)
               for k in range(n + 1) if abs(k - n*p) >= ecart)
```

Il renvoie environ 0.0293 pour `exacte(500, 0.04, 10)`. Comparer avec la majoration de la question 2.

Correction de la question 1

On répète 500 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli de succès « la puce est défectueuse », de probabilité 0,04.

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(500; 0,04)$.

$$E(X) = 500 \times 0,04$$

$$E(X) = 20$$

$$V(X) = 500 \times 0,04 \times 0,96$$

$$V(X) = 19,2$$

$$\sigma(X) = \sqrt{19,2} \approx 4,38$$

Correction de la question 2

Avec $\mu = 20$, $V = 19,2$ et $\delta = 10$, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|X - 20| \geq 10) \leq \frac{19,2}{100} = 0,192$$

Par événement contraire, $P(|X - 20| < 10) \geq 1 - 0,192 = 0,808$. Or $|X - 20| < 10 \iff 10 < X < 30$.

$$P(10 < X < 30) \geq 0,808$$

Correction de la question 3

$F = \frac{X}{500}$ est une transformation linéaire de X .

$$E(F) = \frac{E(X)}{500}$$

$$E(F) = 0,04$$

$$V(F) = \frac{V(X)}{500^2} = \frac{19,2}{250\,000}$$

$$V(F) = 0,0000768$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = 0,02$:

$$P(|F - 0,04| \geq 0,02) \leq \frac{0,0000768}{0,0004}$$

$$P(|F - 0,04| \geq 0,02) \leq 0,192$$

(On retrouve la même borne qu'à la question 2 : les deux événements sont identiques.)

Correction de la question 4

Pour n puces, $F_n = \frac{X_n}{n}$ avec $X_n \sim \mathcal{B}(n; 0,04)$: $E(F_n) = 0,04$ et $V(F_n) = \frac{0,04 \times 0,96}{n} = \frac{0,0384}{n}$.

D'après l'inégalité avec $\delta = 0,01$:

$$P(|F_n - 0,04| \geq 0,01) \leq \frac{0,0384}{n \times 0,0001}$$

On veut ce majorant inférieur ou égal à 0,05 :

$$\frac{0,0384}{0,0001 n} \leq 0,05 \iff n \geq \frac{0,0384}{0,0001 \times 0,05} = 7\,680$$

Un lot de $n = 7\,680$ puces suffit.

Alors $P(|F_n - 0,04| < 0,01) \geq 0,95$.

Correction de la question 5

La valeur exacte $P(|X - 20| \geq 10) \approx 0,0293$ est très inférieure à la majoration **0,192**.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est vraie mais large : elle est environ **6** fois trop grande ici. Son intérêt est de s'appliquer sans connaître la loi complète, et de dimensionner un échantillon avec certitude.

Points clés attendus pour l'exercice 2

- **Q1** : loi binomiale **justifiée** (identique, indépendant, succès), E , V , σ .
- **Q2** : traduction $|X - 20| < 10 \iff 10 < X < 30$, inégalité citée avec μ , V , δ , événement contraire.
- **Q3** : $E(F)$ et $V(F)$ par transformation linéaire ($V(F) = \frac{V(X)}{500^2}$).
- **Q4** : $V(F_n) = \frac{p(1-p)}{n}$, inéquation en n , résultat **arrondi à l'entier supérieur** (ici exact).
- **Q5** : comparaison quantitative de la valeur exacte et de la majoration.

Exercice 3 : un système de composants

Un satellite est équipé de **20** composants identiques qui fonctionnent indépendamment les uns des autres, chacun avec la probabilité **0,95**.

Soit N le nombre de composants qui fonctionnent.

Le satellite est opérationnel si au moins **18** composants fonctionnent.

1. Justifier que N suit une loi binomiale et calculer $E(N)$, $V(N)$ et $\sigma(N)$.
2. Calculer la probabilité que tous les composants fonctionnent.
3. Calculer la probabilité que le satellite soit opérationnel.
4. Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, minorer $P(18 \leq N \leq 20)$.
5. Comparer avec la valeur trouvée à la question 3.

Correction de la question 1

On répète **20** fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli de succès « le composant fonctionne », de probabilité **0,95**.

N suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20; 0,95)$.

$$E(N) = 20 \times 0,95$$

$$E(N) = 19$$

$$V(N) = 20 \times 0,95 \times 0,05$$

$$V(N) = 0,95$$

$$\sigma(N) = \sqrt{0,95} \approx 0,975$$

Correction de la question 2

$$P(N = 20) = \binom{20}{20} \times 0,95^{20} \times 0,05^0 = 0,95^{20}$$

$$P(N = 20) \approx 0,358$$

Correction de la question 3

Le satellite est opérationnel si $N \geq 18$. On passe à l'événement contraire $N \leq 17$ (avec la calculatrice) :

$$P(N \leq 17) \approx 0,0755$$

$$P(N \geq 18) = 1 - P(N \leq 17) \approx 0,9245$$

Conclusion : le satellite est opérationnel avec une probabilité d'environ **92,5 %**.

Correction de la question 4

Comme $N \leq 20$, l'événement $18 \leq N \leq 20$ équivaut à $N \geq 18$, c'est-à-dire à $|N - 19| < 2$ (car $N \in \{0, \dots, 20\}$, donc $N - 19 \leq 1 < 2$ et $N > 17$).

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\mu = 19$, $V = 0,95$ et $\delta = 2$:

$$P(|N - 19| \geq 2) \leq \frac{0,95}{4} = 0,2375$$

Par événement contraire :

$$P(18 \leq N \leq 20) \geq 1 - 0,2375 = 0,7625$$

Correction de la question 5

La valeur exacte $\approx 0,9245$ est supérieure au minorant $0,7625$: les deux résultats sont cohérents.

L'inégalité est vraie mais prudente : elle garantit au moins **76,25 %** alors que la probabilité réelle est **92,45 %**.

Points clés attendus pour l'exercice 3

- **Q1** : loi binomiale justifiée, E , V , σ .
- **Q2-Q3** : formule de $P(X = k)$, événement contraire pour $P(N \geq 18)$, conclusion en contexte.
- **Q4 : traduction** de $18 \leq N \leq 20$ en $|N - 19| < 2$ avec la justification du domaine de N , inégalité citée, événement contraire.
- **Q5** : comparaison qui reste **prudente** (majoration, pas valeur exacte).

Les réflexes à retenir

- **Additionne les variances** seulement après avoir **justifié l'indépendance**.
- Écris μ , V et δ **avant** d'appliquer Bienaymé-Tchebychev.
- **Traduis** les événements en valeur absolue : « strictement entre a et b » $\iff |X - \mu| < \delta$ avec $\mu = \frac{a+b}{2}$.
- Pour un **échantillon**, $V(F_n) = \frac{p(1-p)}{n} \leq \frac{1}{4n}$.
- **Nuance** tes conclusions : une majoration n'est pas la valeur exacte.

Aller plus loin avec les vrais sujets

Quand tu es à l'aise avec ce chapitre, entraîne-toi sur les exercices de probabilités des sujets officiels des années précédentes.

Ils sont disponibles sur le site de l'[APMEP](https://apmep.fr/).

Chronomètre-toi et rédige comme le jour du bac.