

Guide de rédaction : sommes de variables aléatoires et concentration

Ce guide complète le Guide de rédaction général. Il rassemble, pour le chapitre Sommes de variables aléatoires et concentration, les **quatorze situations qui reviennent au bac** et, pour chacune, la rédaction modèle.

Dans ce chapitre, le correcteur veut voir les **ingrédients écrits** : la variable, son espérance, sa variance, l'indépendance, le δ choisi.

Les calculs sont courts.

Ce sont ces ingrédients qui rapportent les points.

Le principe du chapitre

Avec les sommes de variables et la concentration, un correcteur regarde surtout **cinq choses** :

- l'**espérance, la variance et l'écart-type écrits** avant toute inégalité ;
- l'**indépendance justifiée** avant d'additionner des variances ;
- l'**inégalité citée** avec μ , V et δ ;
- la **traduction de l'événement** en valeur absolue et l'usage de l'événement contraire ;
- la **conclusion nuancée** : une majoration est une garantie, pas la valeur exacte.

1. Les quatorze situations et leur rédaction modèle

Situation 1 : espérance, variance, écart-type d'une loi.

« $E(X) = -2 \times 0,7 + 4 \times 0,2 + 10 \times 0,1 = 0,4$. $E(X^2) = 4 \times 0,7 + 16 \times 0,2 + 100 \times 0,1 = 16$. D'après la formule de König-Huygens, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 16 - 0,16 = 15,84$. Donc $\sigma(X) = \sqrt{15,84} \approx 3,98$. »

Vérifie que la somme des probabilités vaut 1.

Situation 2 : transformation affine.

« $G = 2X - 5$. Donc $E(G) = 2E(X) - 5 = 2$, $V(G) = 2^2 V(X) = \frac{35}{3}$ et $\sigma(G) = |2| \sigma(X)$. »

$V(aX + b) = a^2 V(X)$: le b disparaît, le a passe au carré, σ prend la valeur absolue.

Situation 3 : linéarité de l'espérance.

« Par linéarité de l'espérance, $E(3X - 2Y + 4) = 3E(X) - 2E(Y) + 4 = 12$. »

La linéarité **ne demande aucune indépendance**.

Situation 4 : justifier l'indépendance de deux variables.

« Les deux lancers sont indépendants, donc les variables X_1 et X_2 sont indépendantes. »

Par un tableau : « $P(X = 0, Y = 0) = 0,4 \neq 0,3 = P(X = 0)P(Y = 0)$: les variables ne sont pas indépendantes. »

Situation 5 : variance d'une somme.

« Les variables X_1 et X_2 sont indépendantes. Donc $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) = \frac{35}{6}$. »

Additionne les variances, jamais les écarts-types. Pour une différence : $V(X - Y) = V(X) + V(Y)$.

Situation 6 : la loi binomiale comme somme.

« Soit X_i la variable qui vaut 1 si la i -ème épreuve est un succès, 0 sinon.

Les X_i sont de Bernoulli de paramètre p et indépendantes, et $X = X_1 + \dots + X_n$.

Donc $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$. »

Situation 7 : somme et moyenne d'un échantillon.

« $S_n = X_1 + \dots + X_n$ avec les X_i indépendantes de même loi que X . $E(S_n) = nE(X)$, $V(S_n) = nV(X)$ et $\sigma(S_n) = \sigma(X)\sqrt{n}$. La moyenne $M_n = \frac{S_n}{n}$ vérifie $E(M_n) = E(X)$, $V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$ et $\sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$. »

Situation 8 : la fréquence d'un succès.

« $X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $F_n = \frac{X_n}{n}$. $E(F_n) = p$ et $V(F_n) = \frac{V(X_n)}{n^2} = \frac{p(1 - p)}{n} \leq \frac{1}{4n}$. »

Situation 9 : citer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

« X a pour espérance $\mu = 50$ et pour variance $V(X) = 25$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour $\delta = 10$: $P(|X - 50| \geq 10) \leq \frac{V(X)}{\delta^2} = \frac{25}{100} = 0,25$. »

Écris μ , V et δ avant de remplacer.

Situation 10 : traduire un événement en valeur absolue.

« $0 < S < 800 \iff -400 < S - 400 < 400 \iff |S - 400| < 400$. On applique l'inégalité avec $\mu = 400$ et $\delta = 400$. »

« Strictement entre a et b » $\iff |X - \mu| < \delta$ avec $\mu = \frac{a+b}{2}$ et $\delta = \frac{b-a}{2}$.

Situation 11 : minorer avec l'événement contraire.

« $P(|S - 400| \geq 400) \leq 0,099$. Par événement contraire, $P(|S - 400| < 400) \geq 1 - 0,099 = 0,901$. »

Situation 12 : inégalité de concentration pour la moyenne ou la fréquence.

« F_n a pour espérance p et pour variance $\frac{p(1-p)}{n}$. Pour $\delta = 0,05$: $P(|F_n - p| \geq 0,05) \leq \frac{p(1-p)}{n \times 0,0025} \leq \frac{1}{4n \times 0,0025}$. »

Situation 13 : dimensionner un échantillon.

« On veut $\frac{1}{4n \times 0,03^2} \leq 0,05$, c'est-à-dire $n \geq \frac{1}{4 \times 0,0009 \times 0,05} \approx 5\,555,6$. Il suffit de $n = 5\,556$ personnes. »

Arrondis à l'entier supérieur.

Situation 14 : la loi des grands nombres avec les gendarmes.

« Pour tout $n \geq 1$, $0 \leq P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n\delta^2}$. Comme $\frac{V(X)}{n\delta^2} \rightarrow 0$, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - \mu| \geq \delta) = 0$. »

2. Avant / après sur les sommes de variables et la concentration**a) Une variance de somme.**

« $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$. »

« Les variables X et Y sont indépendantes (lancers indépendants). Donc $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$. »

La première n'a pas justifié l'indépendance.

b) Bienaymé-Tchebychev.

« D'après Bienaymé-Tchebychev, $P \leq 0,25$. »

« X est d'espérance $\mu = 50$ et de variance 25. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = 10$, $P(|X - 50| \geq 10) \leq \frac{25}{10^2} = 0,25$. »

c) Traduire un événement.

« $P(10 < X < 30) \leq 0,192$. »

« $10 < X < 30 \iff |X - 20| < 10$. D'après l'inégalité, $P(|X - 20| \geq 10) \leq 0,192$. Par événement contraire, $P(10 < X < 30) \geq 0,808$. »

La première a **inversé le sens** : la majoration porte sur $|X - \mu| \geq \delta$, pas sur $|X - \mu| < \delta$.

d) Une conclusion.

« La fréquence est 0,54, donc la pièce est truquée. »

« Si la pièce est équilibrée, $P(|F_n - 0,5| \geq 0,04) \leq 0,0156$. Il est donc raisonnable de douter de l'équilibre de la pièce. »

3. Les erreurs de rédaction propres à ce chapitre

- Additionner des **variances sans avoir justifié l'indépendance**.
- Additionner les **écarts-types**.
- Écrire $V(aX + b) = aV(X) + b$ ou oublier la **valeur absolue** dans $\sigma(aX)$.
- Appliquer Bienaymé-Tchebychev **sans écrire μ , V , δ** .
- **Inverser le sens** : minorer $P(|X - \mu| \geq \delta)$ au lieu de la majorer.
- Oublier de **traduire** l'événement en valeur absolue.
- **Arrondir à l'entier inférieur** un seuil de taille d'échantillon.
- Conclure avec **certitude** à partir d'une majoration.

4. La check-list du chapitre

- J'ai écrit E , V , σ de chaque variable utilisée.
- J'ai **justifié l'indépendance** avant d'additionner des variances.
- Je n'ai jamais additionné d'**écarts-types**.
- Dans $V(aX + b)$, j'ai mis a **au carré**.
- J'ai écrit μ , V , δ avant d'appliquer Bienaymé-Tchebychev.
- J'ai **traduit l'événement** en valeur absolue, puis utilisé l'**événement contraire** si besoin.
- Pour un échantillon, j'ai utilisé $V(F_n) = \frac{p(1-p)}{n} \leq \frac{1}{4n}$ et arrondi à l'**entier supérieur**.
- Ma **conclusion est nuancée** : une garantie, pas une certitude.

Le dernier mot de ce cours : la loi des grands nombres ne te promet pas d'avoir de la chance, elle te promet que, sur la durée, ta chance se dilue. C'est aussi vrai des exercices de probabilités : plus tu en fais, plus le résultat de ton bac se rapproche de ce que tu vaux.