

Sommes de variables aléatoires et concentration**Fiche Standard**

Nom : _____

Date : _____

Exercice S1 : Un jeu de casino

Pour une mise de 2 €, un jeu de hasard rapporte 0 € avec la probabilité 0,75, 3 € avec la probabilité 0,2 et 8 € avec la probabilité 0,05. On note X le gain algébrique d'un joueur sur une partie (somme reçue moins mise).

1. Donner la loi de X , puis calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$. Interpréter $E(X)$.
2. Au cours d'une soirée, 400 parties indépendantes sont jouées. On note S la somme des gains algébriques des joueurs. Calculer $E(S)$, $V(S)$ et $\sigma(S)$.
3. Montrer, avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que la probabilité de l'événement $S > 0$ (les joueurs gagnent globalement) est inférieure ou égale à 0,01.
4. Minorer la probabilité de l'événement $-600 < S < -200$.
5. Écrire en Python une fonction `partie()` qui simule le gain X d'une partie, puis une fonction `gain_total(n)` qui renvoie le gain total sur n parties.

Exercice S2 : Contrôle de composants

Une usine fabrique des composants électroniques. Chaque composant est défectueux avec la probabilité 0,1, indépendamment des autres. On prélève 120 composants et on note N le nombre de composants défectueux.

1. Justifier que N suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres. Calculer $E(N)$ et $V(N)$.
2. Majorer $P(|N - 12| \geq 8)$ et en déduire un minorant de $P(4 < N < 20)$.
3. Montrer que $P(N \geq 24) \leq 0,075$.
4. Le script suivant calcule la valeur exacte de $P(N \geq 24)$.

```
from math import comb
n, p = 120, 0.1
print(sum(comb(n, k) * p**k * (1 - p)**(n - k) for k in range(24, n + 1)))
```

Il affiche environ 0,00075. Comparer avec la majoration de la question 3 et commenter.

Exercice S3 : Tirages sans remise

Une urne contient cinq jetons numérotés de 1 à 5. On tire successivement et sans remise deux jetons. On note X_1 et X_2 les numéros obtenus au premier et au second tirage, et $S = X_1 + X_2$.

1. Donner la loi de X_1 , puis calculer $E(X_1)$ et $V(X_1)$.
2. Montrer que $P(X_2 = 3) = \frac{1}{5}$ (formule des probabilités totales). On admet que X_2 suit la même loi que X_1 . En déduire $E(S)$.
3. Calculer $P(X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 1)$ et $P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)$. Que constate-t-on? Peut-on utiliser l'additivité de la variance pour S ?
4. Donner la loi de S et calculer $V(S)$.
5. Si les tirages étaient effectués avec remise, que vaudrait $V(S)$? Comparer.

Exercice S4 : Espérance sans indépendance

Une urne contient 10 boules : 4 rouges et 6 noires. On tire successivement et sans remise 3 boules. On note X le nombre de boules rouges obtenues et, pour $i \in \{1; 2; 3\}$, X_i la variable qui vaut 1 si la i -ème boule est rouge et 0 sinon.

1. Exprimer X en fonction de X_1, X_2, X_3 . Justifier que $P(X_i = 1) = 0,4$ pour tout i (chaque boule a la même probabilité d'être tirée au rang i). En déduire $E(X)$.
2. Déterminer la loi de X en dénombrant les tirages simultanés de 3 boules, et retrouver $E(X)$.
3. Calculer $V(X)$. Comparer avec la variance d'une loi $\mathcal{B}(3; 0,4)$. Calculer $P(X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 1)$ et $P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)$ et en déduire si l'additivité de la variance s'applique à $X_1 + X_2 + X_3$.

4. Un lot de 50 pièces contient 8 pièces défectueuses. On en prélève 10 au hasard et sans remise. Quel est le nombre moyen de pièces défectueuses prélevées ?

Exercice S5 : Dimensionner un sondage

Dans une population, une proportion inconnue p de personnes est favorable à un projet. On interroge n personnes choisies de façon indépendante et on note F_n la fréquence de personnes favorables dans l'échantillon.

1. Montrer que $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ pour tout réel p (on pourra développer $\left(p - \frac{1}{2}\right)^2$). En déduire que $V(F_n) \leq \frac{1}{4n}$.
2. Avec l'inégalité de concentration, déterminer le plus petit entier n pour lequel la majoration obtenue garantit $P(|F_n - p| < 0,02) \geq 0,9$ quelle que soit la valeur de p .
3. On interroge 4000 personnes. Déterminer la plus petite valeur de δ , arrondie par excès au millième, pour laquelle la majoration obtenue garantit $P(|F_n - p| < \delta) \geq 0,95$ quelle que soit la valeur de p .
4. Montrer que, pour un même niveau de garantie, diviser δ par 2 oblige à multiplier n par 4.

Exercice S6 : Un taux de défauts est-il crédible ?

Un fabricant annonce que 5 % de ses pièces sont défectueuses. Un client contrôle un lot et observe une fréquence de pièces défectueuses de 0,065. On suppose que l'annonce est exacte ($p = 0,05$) et que les pièces contrôlées sont indépendantes.

1. Le lot contrôlé comporte 5 000 pièces (325 défectueuses). Calculer l'espérance et la variance de la fréquence F de pièces défectueuses, puis majorer $P(|F - 0,05| \geq 0,015)$.
2. Que peut conclure le client ? Rédiger une conclusion nuancée.
3. Même question avec un lot de 1000 pièces (65 défectueuses).

Exercice S7 : Loi des grands nombres et seuil

Soit X une variable aléatoire d'espérance 2 et d'écart-type 1,5. On considère un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de X et sa moyenne M_n .

1. Donner $E(M_n)$ et $V(M_n)$.
2. Montrer que $P(|M_n - 2| \geq 0,2) \leq \frac{56,25}{n}$.
3. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - 2| \geq 0,2)$ en citant le théorème utilisé.
4. Déterminer le plus petit entier n tel que $\frac{56,25}{n} \leq 0,04$.
5. Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie le plus petit entier n tel que $\frac{V}{n\delta^2} \leq \alpha$, puis donner le résultat de `seuil(2.25, 0.2, 0.04)`.

```
def seuil(V, delta, alpha):
    n = 1
    while ..... :
        n = n + 1
    return n
```

Exercice S8 : Loi conjointe et dépendance

Le couple (X, Y) a pour loi conjointe :

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 0$	0,1	0,2	0,1
$X = 1$	0,1	0,1	0,4

1. Déterminer les lois de X et de Y , puis $E(X)$, $V(X)$, $E(Y)$, $V(Y)$.

2. Comparer $P(X = 0 \text{ et } Y = 0)$ et $P(X = 0)P(Y = 0)$. Que peut-on en conclure pour la suite ?
3. Déterminer la loi de $S = X + Y$, puis $E(S)$ et $V(S)$. A-t-on $E(S) = E(X) + E(Y)$? A-t-on $V(S) = V(X) + V(Y)$?
4. *Pour aller plus loin, hors programme.* Calculer $E(XY)$ et vérifier que $V(S) = V(X) + V(Y) + 2(E(XY) - E(X)E(Y))$.

Exercice S9 : Quel stock prévoir ?

Un site de vente en ligne reçoit chaque jour 1 000 visiteurs. Chaque visiteur achète un certain article avec la probabilité 0,12, indépendamment des autres. On note N le nombre d'articles demandés en une journée. Une rupture de stock se produit si N dépasse strictement le stock s .

1. Donner la loi de N , puis $E(N)$ et $V(N)$.
2. Montrer que $P(N \geq 166) \leq 0,05$. Que peut-on dire d'un stock de 165 articles ?
3. Le gérant veut un risque de rupture inférieur ou égal à 1 %. En appliquant l'inégalité avec un δ entier, déterminer un stock suffisant.
4. Une étude exacte donne $P(N \geq 166) \approx 1,2 \times 10^{-5}$. Commenter.

Exercice S10 : Valeur exacte et inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit S_n une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}\left(n; \frac{1}{2}\right)$. On s'intéresse à l'événement $A_n = (|S_n - \frac{n}{2}| > \sqrt{n})$.

1. Calculer $E(S_n)$ et $V(S_n)$. Montrer que $P(A_n) \leq \frac{1}{4}$ pour tout $n \geq 1$.
2. On considère le script suivant, dans lequel r désigne $\sqrt{n}$ (on prend n carré parfait).

```
from math import comb

def risque(n, r):
    total = sum(comb(n, k) for k in range(n + 1)
                if abs(2 * k - n) > 2 * r)
    return total / 2**n

for r in (5, 10, 20, 40):
    print(r * r, risque(r * r, r))
```

Justifier que `risque(n, r)` renvoie $P(A_n)$. Le script affiche 25 0,0433 ..., 100 0,0352 ..., 400 0,0402 ... et 1600 0,0428 Comparer ces valeurs à la majoration de la question 1.

3. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est-elle précise ici ? Que dire de l'évolution de $P(A_n)$ quand n augmente ? Pour quelle raison la majoration ne dépend-elle pas de n ?

Exercice S11 : Simuler une marche aléatoire

Un pion part de l'origine d'un axe. À chaque étape, il avance de 1 ou recule de 1 avec la même probabilité, indépendamment des étapes précédentes. On note $X_i \in \{-1; 1\}$ le déplacement de l'étape i et $S_n = X_1 + \dots + X_n$ la position après n étapes. On considère le script suivant.

```
from random import choice

def marche(n):
    x = 0
    for i in range(n):
        x = x + choice([-1, 1])
    return x

N = 10000
positions = [marche(100) for _ in range(N)]
m = sum(positions) / N
```

```
v = sum((x - m)**2 for x in positions) / N
print(m, v)
```

1. Calculer $E(X_i)$ et $V(X_i)$, puis $E(S_n)$ et $V(S_n)$. Quelles valeurs approximatives le script affiche-t-il pour m et v ?
2. Soit R le nombre d'étapes où le pion avance après 100 étapes. Justifier que R suit une loi binomiale, puis exprimer S_{100} en fonction de R . En déduire que $P(S_{100} = 0) = \binom{100}{50} \frac{1}{2^{100}} \approx 0,0796$.
3. Majorer $P(|S_{100}| \geq 30)$ avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Sachant que la valeur exacte est 0,0035 (à 10^{-4} près), commenter.
4. Modifier le script pour estimer la proportion de marches pour lesquelles $|S_{100}| \geq 30$. Quelle valeur approximative s'attend-on à obtenir ?