

Corrigé : Sommes de variables aléatoires et concentration

Fiche

Standard

S1.

1. Gain algébrique = somme reçue $- 2$: les valeurs sont -2 , 1 et 6 .

x	-2	1	6
$P(X = x)$	$0,75$	$0,2$	$0,05$

$$E(X) = -2 \times 0,75 + 1 \times 0,2 + 6 \times 0,05 = -1,5 + 0,2 + 0,3 = -1.$$

$$E(X^2) = 4 \times 0,75 + 1 \times 0,2 + 36 \times 0,05 = 3 + 0,2 + 1,8 = 5.$$

$$V(X) = 5 - (-1)^2 = 4 \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{4} = 2.$$

Interprétation : un joueur perd en moyenne 1 € par partie ; le jeu est défavorable au joueur.

2. $S = X_1 + \dots + X_{400}$, où les X_i sont les gains des parties. Les parties sont indépendantes et de même loi que X .

$$\text{Par linéarité : } E(S) = 400 \times (-1) = -400.$$

$$\text{Par indépendance : } V(S) = 400 \times 4 = 1\,600, \text{ donc } \sigma(S) = \sqrt{1\,600} = 40.$$

3. On a $\mu = E(S) = -400$ et $V(S) = 1\,600$. Si $S > 0$, alors $S - \mu > 400$, donc $|S + 400| \geq 400$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = 400$:

$$P(S > 0) \leq P(|S + 400| \geq 400) \leq \frac{1\,600}{400^2} = 0,01.$$

4. $-600 < S < -200 \iff |S + 400| < 200$. Avec $\delta = 200$: $P(|S + 400| \geq 200) \leq \frac{1\,600}{200^2} = 0,04$. Par événement contraire : $P(-600 < S < -200) \geq 1 - 0,04 = 0,96$.

5. On simule un nombre aléatoire u dans $[0; 1[$ et on lit la loi :

```
import random
```

```
def partie():
```

```
    u = random.random()
```

```
    if u < 0.75:
```

```
        return -2
```

```
    elif u < 0.95:
```

```
        return 1
```

```
    else:
```

```
        return 6
```

```
def gain_total(n):
```

```
    s = 0
```

```
    for _ in range(n):
```

```
        s = s + partie()
```

```
    return s
```

Les probabilités de `partie()` sont $0,75$ ($u < 0,75$), $0,2$ ($0,75 \leq u < 0,95$) et $0,05$ (sinon).

Conclusion : $E(X) = -1$, $V(X) = 4$; $E(S) = -400$, $\sigma(S) = 40$; les joueurs gagnent globalement de l'argent avec une probabilité d'au plus $0,01$; $P(-600 < S < -200) \geq 0,96$.

S2.

1. Chaque composant est défectueux avec la probabilité $0,1$, indépendamment des autres : on répète 120 fois une épreuve de Bernoulli de façon indépendante. Donc $N \sim \mathcal{B}(120; 0,1)$, $E(N) = 120 \times 0,1 = 12$ et $V(N) = 120 \times 0,1 \times 0,9 = 10,8$.

2. Avec $\mu = 12$ et $\delta = 8$: $P(|N - 12| \geq 8) \leq \frac{10,8}{64} = 0,16875$.

$4 < N < 20 \iff |N - 12| < 8$, donc par événement contraire $P(4 < N < 20) \geq 1 - 0,16875 = 0,83125$.

3. Si $N \geq 24$, alors $N - 12 \geq 12$, donc $|N - 12| \geq 12$. Avec $\delta = 12$: $P(N \geq 24) \leq P(|N - 12| \geq 12) \leq \frac{10,8}{144} = 0,075$.

4. La valeur exacte ($\approx 0,00075$) est environ cent fois plus petite que la majoration 0,075. L'inégalité est vraie mais très large : elle ne demande que $E(N)$ et $V(N)$ et vaut pour toute loi. Elle suffit ici à garantir qu'avoir au moins deux fois plus de défauts que prévu est un événement rare.

Conclusion : $N \sim \mathcal{B}(120; 0,1)$, $E(N) = 12$, $V(N) = 10,8$; $P(4 < N < 20) \geq 0,831$; $P(N \geq 24) \leq 0,075$ (valeur exacte $\approx 0,00075$).

S3.

1. Le premier jeton est tiré au hasard : $P(X_1 = k) = \frac{1}{5}$ pour $k \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

$$E(X_1) = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{5} = 3; E(X_1^2) = \frac{1 + 4 + 9 + 16 + 25}{5} = 11; V(X_1) = 11 - 9 = 2.$$

2. Les événements $(X_1 = j)$, $j \in \{1; \dots; 5\}$, forment une partition. Si $j \neq 3$, $P_{X_1=j}(X_2 = 3) = \frac{1}{4}$; si $j = 3$, ce jeton n'est plus dans l'urne et $P_{X_1=3}(X_2 = 3) = 0$. Donc :

$$P(X_2 = 3) = 4 \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times 0 = \frac{1}{5}.$$

Comme X_2 a la même loi que X_1 , $E(X_2) = 3$. Par linéarité : $E(S) = E(X_1) + E(X_2) = 6$.

3. $P(X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 1) = 0$ (le jeton 1 ne peut pas être tiré deux fois) alors que $P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25} \neq 0$. Les deux nombres sont différents : le tirage sans remise n'est pas une succession d'épreuves indépendantes, et l'additivité de la variance ne peut pas être utilisée pour S .

4. Les 20 couples ordonnés sont équiprobables (probabilité $\frac{1}{20}$). Pour S : $3 = 1 + 2$; $4 = 1 + 3$; $5 = 1 + 4 = 2 + 3$; $6 = 1 + 5 = 2 + 4$; $7 = 2 + 5 = 3 + 4$; $8 = 3 + 5$; $9 = 4 + 5$, chaque décomposition donnant deux couples ordonnés.

s	3	4	5	6	7	8	9
$P(S = s)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

Somme : $\frac{4}{10} + \frac{3}{5} = 1$. On retrouve $E(S) = \frac{3 + 4 + 10 + 12 + 14 + 8 + 9}{10} = 6$.

$$E(S^2) = \frac{9 + 16 + 50 + 72 + 98 + 64 + 81}{10} = 39, \text{ donc } V(S) = 39 - 36 = 3.$$

5. Avec remise, les tirages sont indépendants : $V(S) = V(X_1) + V(X_2) = 2 + 2 = 4$.

Conclusion : $E(S) = 6$ dans les deux cas; sans remise $V(S) = 3$ (variables dépendantes), avec remise $V(S) = 4$. L'additivité des variances est fautive sans indépendance.

S4.

1. $X = X_1 + X_2 + X_3$. Les boules sont tirées dans un ordre aléatoire : chacune des 10 boules a la même probabilité d'occuper le rang i , donc $P(X_i = 1) = \frac{4}{10} = 0,4$ et $E(X_i) = 0,4$. Par linéarité (sans indépendance) : $E(X) = 3 \times 0,4 = 1,2$.

2. Un tirage simultané de 3 boules : $\binom{10}{3} = 120$ cas équiprobables. $P(X = k) = \frac{\binom{4}{k} \binom{6}{3-k}}{120}$:

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{20}{120} = \frac{1}{6}$	$\frac{60}{120} = \frac{1}{2}$	$\frac{36}{120} = \frac{3}{10}$	$\frac{4}{120} = \frac{1}{30}$

Somme : $\frac{20+60+36+4}{120} = 1$. $E(X) = \frac{0 + 60 + 72 + 12}{120} = \frac{144}{120} = 1,2$: même résultat.

3. $E(X^2) = \frac{60 + 4 \times 36 + 9 \times 4}{120} = \frac{240}{120} = 2$, donc $V(X) = 2 - 1,2^2 = 0,56$. Pour $\mathcal{B}(3; 0,4)$, $V = 3 \times 0,4 \times 0,6 = 0,72$: la variance sans remise est plus petite.

$$P(X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 1) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{15} \approx 0,133 \text{ alors que } P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) = 0,16 : \text{ les deux}$$

nombre sont différents, le tirage sans remise n'est pas une succession d'épreuves indépendantes et l'additivité de la variance ne s'applique pas à $X_1 + X_2 + X_3$ (ce qui explique $0,56 \neq 0,72$).

4. Le raisonnement est le même : chaque pièce prélevée est défectueuse avec la probabilité $\frac{8}{50} = 0,16$, donc $E = 10 \times 0,16 = 1,6$.

Conclusion : $E(X) = 1,2$ et $V(X) = 0,56$; en moyenne 1,6 pièce défectueuse est prélevée.

S5.

1. $\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 = p^2 - p + \frac{1}{4} \geq 0$, donc $p(1-p) = p - p^2 \leq \frac{1}{4}$.

Le nombre de personnes favorables suit $\mathcal{B}(n, p)$ et F_n est ce nombre divisé par n : $E(F_n) = p$ et

$$V(F_n) = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n} \leq \frac{1}{4n}.$$

2. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = 0,02$:

$$P(|F_n - p| \geq 0,02) \leq \frac{V(F_n)}{0,02^2} \leq \frac{1}{4n \times 0,0004} = \frac{625}{n}.$$

Alors $P(|F_n - p| < 0,02) \geq 1 - \frac{625}{n}$, et on veut $\frac{625}{n} \leq 0,1 \iff n \geq 6250$. Le plus petit entier est $n = 6250$.

3. On veut $\frac{1}{4 \times 4000 \times \delta^2} \leq 0,05 \iff \delta^2 \geq \frac{1}{800}$, soit $\delta \geq 0,0354 \dots$ On retient $\delta = 0,036$ (vérification : $\frac{1}{16000 \times 0,036^2} = \frac{1}{20,736} \approx 0,048 \leq 0,05$).

4. Le majorant est $\frac{1}{4n\delta^2}$. En remplaçant δ par $\frac{\delta}{2}$ et n par $4n$: $\frac{1}{4 \times 4n \times \frac{\delta^2}{4}} = \frac{1}{4n\delta^2}$, inchangé. Pour un même majorant, $\delta^2 \times n$ est constant : diviser δ par 2 divise δ^2 par 4, donc multiplie n par 4.

Conclusion : $n = 6250$ personnes suffisent pour une précision de 0,02 avec une probabilité d'au moins 0,9 ; avec 4000 personnes, la précision garantie est 0,036 avec une probabilité d'au moins 0,95.

S6.

1. Si $p = 0,05$, le nombre de pièces défectueuses suit $\mathcal{B}(5000; 0,05)$, donc $E(F) = 0,05$ et $V(F) = \frac{0,05 \times 0,95}{5000} = \frac{0,0475}{5000} = 9,5 \times 10^{-6}$.

Avec $\delta = 0,015$: $P(|F - 0,05| \geq 0,015) \leq \frac{9,5 \times 10^{-6}}{0,015^2} = \frac{9,5 \times 10^{-6}}{2,25 \times 10^{-4}} \approx 0,0422$.

2. L'écart observé est $|0,065 - 0,05| = 0,015$: l'événement $|F - 0,05| \geq 0,015$ s'est réalisé. Si l'annonce était exacte, il aurait une probabilité d'au plus 0,043. Il est donc raisonnable de douter de l'annonce du fabricant (sans pouvoir l'affirmer avec certitude).

3. Pour $n = 1000$: $V(F) = \frac{0,0475}{1000} = 4,75 \times 10^{-5}$ et $P(|F - 0,05| \geq 0,015) \leq \frac{4,75 \times 10^{-5}}{2,25 \times 10^{-4}} \approx 0,211$.

Un tel écart peut se produire avec une probabilité allant jusqu'à 21 % : on ne peut pas douter de l'annonce.

Conclusion : avec 5000 pièces, il est raisonnable de douter de l'annonce (probabilité au plus 0,043 si elle est exacte) ; avec 1000 pièces, la même fréquence n'autorise pas ce doute.

S7.

1. $E(M_n) = E(X) = 2$ et $V(M_n) = \frac{V(X)}{n} = \frac{1,5^2}{n} = \frac{2,25}{n}$.

2. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à M_n avec $\mu = 2$ et $\delta = 0,2$:

$$P(|M_n - 2| \geq 0,2) \leq \frac{2,25/n}{0,04} = \frac{56,25}{n}.$$

3. Pour tout $n \geq 1$, $0 \leq P(|M_n - 2| \geq 0,2) \leq \frac{56,25}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{56,25}{n} = 0$. D'après le théorème des

gendarmes, la limite est 0 (loi faible des grands nombres).

4. $\frac{56,25}{n} \leq 0,04 \iff n \geq \frac{56,25}{0,04} = 1\,406,25$. Le plus petit entier est $n = 1\,407$.
5. Condition de la boucle : $V / (n * \text{delta}^2) > \alpha$ (on continue tant que le majorant dépasse α).

```
def seuil(V, delta, alpha):
    n = 1
    while V / (n * delta**2) > alpha:
        n = n + 1
    return n
```

`seuil(2.25, 0.2, 0.04)` renvoie 1407, valeur trouvée à la question 4.

Conclusion : $P(|M_n - 2| \geq 0,2) \rightarrow 0$; $n = 1\,407$ observations garantissent un majorant inférieur ou égal à 0,04.

S8.

1. Sommes des lignes et des colonnes. $P(X = 0) = 0,4$, $P(X = 1) = 0,6$; $P(Y = 0) = 0,2$, $P(Y = 1) = 0,3$, $P(Y = 2) = 0,5$.
 $E(X) = 0,6$, $E(X^2) = 0,6$, $V(X) = 0,6 - 0,36 = 0,24$.
 $E(Y) = 0,3 + 1 = 1,3$, $E(Y^2) = 0,3 + 2 = 2,3$, $V(Y) = 2,3 - 1,69 = 0,61$.
2. $P(X = 0)P(Y = 0) = 0,4 \times 0,2 = 0,08 \neq 0,1 = P(X = 0 \text{ et } Y = 0)$. Les deux nombres sont différents : le couple (X, Y) ne se comporte pas comme deux épreuves indépendantes, et l'additivité de la variance ne peut pas être supposée.
3. $S = 0$ pour $(0, 0)$; $S = 1$ pour $(0, 1)$ et $(1, 0)$; $S = 2$ pour $(0, 2)$ et $(1, 1)$; $S = 3$ pour $(1, 2)$.

s	0	1	2	3
$P(S = s)$	0,1	0,3	0,2	0,4

$E(S) = 0,3 + 0,4 + 1,2 = 1,9 = E(X) + E(Y)$. $E(S^2) = 0,3 + 0,8 + 3,6 = 4,7$ et $V(S) = 4,7 - 1,9^2 = 1,09$.
 Or $V(X) + V(Y) = 0,85 \neq 1,09$: sans indépendance, l'additivité des variances est fautive.

4. XY vaut 1 pour $(1, 1)$ et 2 pour $(1, 2)$, et 0 sinon : $E(XY) = 0,1 + 2 \times 0,4 = 0,9$. Alors $E(XY) - E(X)E(Y) = 0,9 - 0,6 \times 1,3 = 0,12$ et $V(X) + V(Y) + 2 \times 0,12 = 0,85 + 0,24 = 1,09 = V(S)$.

Conclusion : $P(X = 0 \text{ et } Y = 0) \neq P(X = 0)P(Y = 0)$; $E(S) = 1,9$ et $V(S) = 1,09$, supérieure à $V(X) + V(Y) = 0,85$.

S9.

1. On répète 1000 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli de succès « le visiteur achète » ($p = 0,12$) : $N \sim \mathcal{B}(1000; 0,12)$. $E(N) = 120$, $V(N) = 1000 \times 0,12 \times 0,88 = 105,6$.
2. Si $N \geq 166$, alors $N - 120 \geq 46$ donc $|N - 120| \geq 46$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = 46$:

$$P(N \geq 166) \leq P(|N - 120| \geq 46) \leq \frac{105,6}{46^2} = \frac{105,6}{2116} \approx 0,0499 \leq 0,05.$$

Avec un stock $s = 165$, la rupture ($N > 165$, soit $N \geq 166$) a une probabilité d'au plus 0,05.

3. Rupture avec un stock s : $N \geq s + 1$, donc $N - 120 \geq s - 119$. On veut $\frac{105,6}{\delta^2} \leq 0,01 \iff \delta^2 \geq 10560 \iff \delta \geq 102,76 \dots$ Le plus petit entier est $\delta = 103$ (vérification : $\frac{105,6}{103^2} = \frac{105,6}{10609} \approx 0,00995$).
 On prend $s - 119 = 103$, soit $s = 222$: $P(N > 222) \leq P(|N - 120| \geq 103) \leq 0,00995 \leq 0,01$.
4. La valeur exacte $1,2 \times 10^{-5}$ est environ quatre mille fois plus petite que 0,05 : la majoration de Bienaymé-Tchebychev est sûre mais très prudente, donc un stock bien plus petit que 222 suffirait en pratique. Son intérêt est de s'appuyer uniquement sur $E(N)$ et $V(N)$.

Conclusion : un stock de 165 articles limite le risque de rupture à 5 % au plus ; un stock de 222 articles le limite à 1 % au plus.

S10.

1. $S_n \sim \mathcal{B}(n; \frac{1}{2})$ donc $E(S_n) = \frac{n}{2}$ et $V(S_n) = n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{n}{4}$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = \sqrt{n}$ donne

$$P(|S_n - \frac{n}{2}| \geq \sqrt{n}) \leq \frac{n/4}{(\sqrt{n})^2} = \frac{1}{4}.$$

Comme A_n (inégalité stricte) est contenu dans l'événement $|S_n - \frac{n}{2}| \geq \sqrt{n}$, $P(A_n) \leq \frac{1}{4}$.

2. Pour $k \in \{0; \dots; n\}$, $\binom{n}{k}/2^n = P(S_n = k)$. La condition $|2k - n| > 2r$ équivaut à $|k - \frac{n}{2}| > r = \sqrt{n}$. La somme des $\binom{n}{k}$ de ces valeurs de k , divisée par 2^n , est donc $P(A_n)$. Les valeurs affichées (0,043, 0,035, 0,040, 0,043) sont toutes inférieures à 0,05, donc très inférieures à la majoration 0,25.
3. Non, la majoration 0,25 est au moins cinq fois trop grande : l'inégalité est valable pour toute loi, ce qui explique qu'elle soit loin d'être optimale pour une loi binomiale. La probabilité $P(A_n)$ reste voisine de 0,04 quand n augmente. La majoration ne dépend pas de n car l'écart $\sqrt{n}$ est proportionnel à l'écart type $\sigma(S_n) = \frac{\sqrt{n}}{2}$: on compare toujours à un écart de 2 écarts types, d'où $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$.

S11.

1. $E(X_i) = \frac{1}{2} \times (-1) + \frac{1}{2} \times 1 = 0$ et $E(X_i^2) = 1$, donc $V(X_i) = 1$. Par linéarité $E(S_n) = 0$ et, les étapes étant indépendantes, $V(S_n) = n$: pour $n = 100$, $E(S_{100}) = 0$ et $V(S_{100}) = 100$ (écart type 10). Le script affiche une valeur de `m` proche de 0 (écart de l'ordre de $\frac{10}{\sqrt{10\,000}} = 0,1$) et une valeur de `v` proche de 100.
2. Chaque étape est une épreuve de Bernoulli (avancer, probabilité $\frac{1}{2}$), les 100 étapes sont indépendantes. Donc R suit la loi $\mathcal{B}(100; \frac{1}{2})$. Le pion avance R fois et recule $100 - R$ fois : $S_{100} = R - (100 - R) = 2R - 100$. Donc $S_{100} = 0 \iff R = 50$ et $P(S_{100} = 0) = \binom{100}{50} \left(\frac{1}{2}\right)^{100} \approx 0,0796$.
3. $E(S_{100}) = 0$ et $V(S_{100}) = 100$: $P(|S_{100}| \geq 30) \leq \frac{100}{30^2} = \frac{1}{9} \approx 0,111$. La valeur exacte 0,0035 est environ trente fois plus petite : la majoration est correcte mais très large.
4. Par exemple :

```
prop = sum(1 for x in positions if abs(x) >= 30) / N
print(prop)
```

On s'attend à une valeur proche de 0,0035 (soit une trentaine de marches sur 10 000).