

Sommes de variables aléatoires et concentration

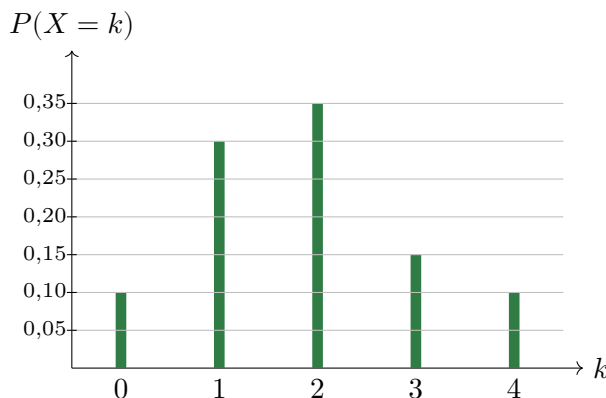
Fiche Bases

Nom : _____

Date : _____

Exercice B1 : Lecture d'un diagramme en bâtons

Le diagramme ci-dessous représente la loi d'une variable aléatoire X : le nombre d'appels reçus par un standard en une minute.



1. Dresser le tableau de la loi de X et vérifier que la somme des probabilités vaut 1.
2. Calculer $P(X \geq 3)$ et $P(1 \leq X \leq 3)$.
3. Calculer $E(X)$, puis $E(X^2)$, puis $V(X)$ avec la formule de König-Huygens. Donner $\sigma(X)$ arrondi au centième.

Exercice B2 : Transformation affine

Une variable aléatoire X vérifie $E(X) = 4$ et $V(X) = 9$.

1. Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de $Y = 3X - 2$.
2. Même question pour $W = 5 - \frac{X}{2}$.
3. Déterminer les réels $a > 0$ et b tels que $Z = aX + b$ soit centrée réduite.

Exercice B3 : Combiner des variables

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $E(X) = 3$, $V(X) = 4$, $E(Y) = -2$ et $V(Y) = 9$.

1. Calculer $E(2X + Y)$, $E(X - Y)$ et $E(4Y - 1)$.
2. On suppose que X et Y sont indépendantes. Calculer $V(X + Y)$, $V(X - Y)$, $V(2X + Y)$ et $\sigma(2X + Y)$.
3. A-t-on $\sigma(X + Y) = \sigma(X) + \sigma(Y)$? Justifier.
4. Quelle hypothèse a servi à la question 2 ? Est-elle nécessaire pour la question 1 ?

Exercice B4 : Loi binomiale

1. Un élève répond au hasard aux 40 questions d'un QCM : chaque question propose quatre réponses dont une seule est exacte. On note X le nombre de bonnes réponses. Donner la loi de X , puis $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ (arrondi au centième).
2. Une variable Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $E(Y) = 30$ et $V(Y) = 21$. Déterminer n et p .

Exercice B5 : Loi d'une somme

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. X prend les valeurs 1 et 2 avec les probabilités 0,3 et 0,7. Y prend les valeurs 0, 1 et 2 avec les probabilités 0,5, 0,3 et 0,2. On pose $S = X + Y$.

1. Déterminer la loi de S et vérifier que la somme des probabilités vaut 1.
2. Calculer $E(S)$ à l'aide de la loi de S , puis avec la linéarité de l'espérance.
3. Calculer $V(S)$ à l'aide de la loi de S , puis avec les variances de X et de Y (justifier l'emploi de la formule).

Exercice B6 : Somme et moyenne d'un échantillon

Soit X une variable aléatoire d'espérance 10 et d'écart-type 4. On considère un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de X , sa somme $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et sa moyenne $M_n = \frac{S_n}{n}$.

1. Pour $n = 64$, calculer $E(S_n)$, $V(S_n)$, $\sigma(S_n)$, puis $E(M_n)$, $V(M_n)$ et $\sigma(M_n)$.
2. Quelle taille n faut-il choisir pour que $\sigma(M_n) = 0,2$?
3. Par quel facteur faut-il multiplier n pour diviser $\sigma(M_n)$ par 3 ?

Exercice B7 : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Une variable aléatoire X a pour espérance 20 et pour variance 9.

1. Majorer $P(|X - 20| \geq 6)$.
2. Écrire l'événement $10 < X < 30$ avec une valeur absolue, puis minorer sa probabilité.
3. Pour quelle valeur de δ l'inégalité donne-t-elle $P(|X - 20| \geq \delta) \leq 0,01$?
4. Que donne l'inégalité pour $\delta = 3$? Commenter.

Exercice B8 : Fréquence de « pile »

On lance 1 000 fois une pièce équilibrée. On note F la fréquence de « pile » obtenue.

1. Calculer $E(F)$ et $V(F)$.
2. Majorer $P(|F - 0,5| \geq 0,05)$, puis minorer $P(0,45 < F < 0,55)$.
3. Pour n lancers, quelle valeur de n garantit $P(|F_n - 0,5| \geq 0,05) \leq 0,01$?

Exercice B9 : Simulation en Python

On considère le script suivant.

```
import random

def somme_deux_des():
    return random.randint(1, 6) + random.randint(1, 6)

N = 10000
liste = [somme_deux_des() for _ in range(N)]
m = sum(liste) / N
v = sum((x - m)**2 for x in liste) / N
print(m, v)
```

1. Soit S la somme de deux dés équilibrés indépendants. Calculer $E(S)$ et $V(S)$.
2. Quelles valeurs approximatives le script affiche-t-il ? Quel résultat du cours justifie cette réponse ?
3. Modifier le script pour qu'il affiche la fréquence des parties où la somme est supérieure ou égale à 10. Quelle valeur théorique cette fréquence approche-t-elle ?

Exercice B10 : Vrai ou faux

Justifier chaque réponse.

1. Pour deux variables aléatoires quelconques, $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
2. Si X et Y sont indépendantes, $V(2X - 3Y) = 2V(X) - 3V(Y)$.
3. Si X suit la loi $\mathcal{B}(10; 0,5)$, alors $V(X) = 2,5$.
4. Avec 100 fois plus d'observations, l'écart-type de la moyenne M_n est divisé par 100.
5. Si $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$, alors $P(|X| \geq 2) = 0,25$.