

Corrigé : Sommes de variables aléatoires et concentration

Fiche Bases

B1.

1. Lecture des hauteurs des bâtons :

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	0,10	0,30	0,35	0,15	0,10

Somme : $0,10 + 0,30 + 0,35 + 0,15 + 0,10 = 1$.

2. $P(X \geq 3) = 0,15 + 0,10 = 0,25$ et $P(1 \leq X \leq 3) = 0,30 + 0,35 + 0,15 = 0,80$.
3. $E(X) = 0 \times 0,10 + 1 \times 0,30 + 2 \times 0,35 + 3 \times 0,15 + 4 \times 0,10 = 0,3 + 0,7 + 0,45 + 0,4 = 1,85$.
 $E(X^2) = 0 + 1 \times 0,30 + 4 \times 0,35 + 9 \times 0,15 + 16 \times 0,10 = 0,3 + 1,4 + 1,35 + 1,6 = 4,65$.
D'après la formule de König-Huygens : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 4,65 - 1,85^2 = 4,65 - 3,4225 = 1,2275$.
Donc $\sigma(X) = \sqrt{1,2275} \approx 1,11$.

Conclusion : $P(X \geq 3) = 0,25$, $P(1 \leq X \leq 3) = 0,8$, $E(X) = 1,85$ **appel**, $V(X) = 1,2275$ **et** $\sigma(X) \approx 1,11$.

B2. On utilise $E(aX + b) = aE(X) + b$, $V(aX + b) = a^2V(X)$ et $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$. Ici $\sigma(X) = \sqrt{9} = 3$.

1. $E(Y) = 3 \times 4 - 2 = 10$, $V(Y) = 3^2 \times 9 = 81$ et $\sigma(Y) = 3 \times 3 = 9$.
2. $W = -\frac{1}{2}X + 5$: $E(W) = -\frac{1}{2} \times 4 + 5 = 3$, $V(W) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \times 9 = \frac{9}{4}$ et $\sigma(W) = \left|-\frac{1}{2}\right| \times 3 = \frac{3}{2}$.
3. On veut $E(Z) = aE(X) + b = 4a + b = 0$ et $V(Z) = 9a^2 = 1$. Avec $a > 0$: $a = \frac{1}{3}$, puis $b = -\frac{4}{3}$.
Ainsi $Z = \frac{X - 4}{3} = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$.

Conclusion : $E(Y) = 10$, $V(Y) = 81$, $\sigma(Y) = 9$; $E(W) = 3$, $V(W) = \frac{9}{4}$, $\sigma(W) = \frac{3}{2}$; $Z = \frac{X - 4}{3}$.

B3.

1. Par linéarité de l'espérance : $E(2X + Y) = 2 \times 3 - 2 = 4$; $E(X - Y) = 3 - (-2) = 5$; $E(4Y - 1) = 4 \times (-2) - 1 = -9$.
2. Les variables sont indépendantes, donc les variances s'additionnent : $V(X + Y) = 4 + 9 = 13$. Pour la différence, $V(-Y) = (-1)^2V(Y) = V(Y)$, donc $V(X - Y) = 4 + 9 = 13$. Enfin $V(2X + Y) = V(2X) + V(Y) = 2^2 \times 4 + 9 = 25$ et $\sigma(2X + Y) = \sqrt{25} = 5$.
3. $\sigma(X + Y) = \sqrt{13} \approx 3,61$ alors que $\sigma(X) + \sigma(Y) = 2 + 3 = 5$. Les écarts-types ne s'additionnent pas : ce sont les variances. Non.
4. L'indépendance a servi pour additionner les variances. Elle n'est pas nécessaire à la question 1 : la linéarité de l'espérance est valable pour toutes variables aléatoires.

Conclusion : $E(2X + Y) = 4$, $E(X - Y) = 5$, $E(4Y - 1) = -9$; $V(X + Y) = V(X - Y) = 13$, $V(2X + Y) = 25$, $\sigma(2X + Y) = 5$.

B4.

1. Les 40 réponses au hasard sont indépendantes, et chacune est exacte avec la probabilité 0,25. Donc X suit la loi $\mathcal{B}(40; 0,25)$.
 $E(X) = 40 \times 0,25 = 10$, $V(X) = 40 \times 0,25 \times 0,75 = 7,5$ et $\sigma(X) = \sqrt{7,5} \approx 2,74$.
2. $E(Y) = np = 30$ et $V(Y) = np(1 - p) = 21$. En divisant : $1 - p = \frac{21}{30} = 0,7$, donc $p = 0,3$, puis
 $n = \frac{30}{0,3} = 100$.

Conclusion : $X \sim \mathcal{B}(40; 0,25)$, $E(X) = 10$, $V(X) = 7,5$, $\sigma(X) \approx 2,74$; $Y \sim \mathcal{B}(100; 0,3)$.

B5.

1. Les variables étant indépendantes, $P(X = x \text{ et } Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$.

$$P(S = 1) = P(X = 1, Y = 0) = 0,3 \times 0,5 = 0,15.$$

$$P(S = 2) = P(X = 1, Y = 1) + P(X = 2, Y = 0) = 0,3 \times 0,3 + 0,7 \times 0,5 = 0,09 + 0,35 = 0,44.$$

$$P(S = 3) = P(X = 1, Y = 2) + P(X = 2, Y = 1) = 0,3 \times 0,2 + 0,7 \times 0,3 = 0,06 + 0,21 = 0,27.$$

$$P(S = 4) = P(X = 2, Y = 2) = 0,7 \times 0,2 = 0,14.$$

s	1	2	3	4
$P(S = s)$	0,15	0,44	0,27	0,14

$$\text{Somme : } 0,15 + 0,44 + 0,27 + 0,14 = 1.$$

2. $E(S) = 0,15 + 2 \times 0,44 + 3 \times 0,27 + 4 \times 0,14 = 0,15 + 0,88 + 0,81 + 0,56 = 2,4$.

$$\text{Par linéarité : } E(X) = 0,3 + 1,4 = 1,7, E(Y) = 0,3 + 0,4 = 0,7, \text{ donc } E(S) = 1,7 + 0,7 = 2,4.$$

3. $E(S^2) = 0,15 + 4 \times 0,44 + 9 \times 0,27 + 16 \times 0,14 = 0,15 + 1,76 + 2,43 + 2,24 = 6,58$, donc $V(S) = 6,58 - 2,4^2 = 6,58 - 5,76 = 0,82$.

$$\text{Par les variances : } E(X^2) = 0,3 + 2,8 = 3,1 \text{ et } V(X) = 3,1 - 1,7^2 = 0,21; E(Y^2) = 0,3 + 0,8 = 1,1 \text{ et } V(Y) = 1,1 - 0,7^2 = 0,61. \text{ Comme } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes, } V(S) = V(X) + V(Y) = 0,21 + 0,61 = 0,82.$$

Conclusion : $E(S) = 2,4$ et $V(S) = 0,82$, résultats confirmés par les deux méthodes.

B6. On a $E(X) = 10$, $V(X) = 16$.

1. Pour $n = 64$: $E(S_n) = nE(X) = 640$, $V(S_n) = nV(X) = 1024$ et $\sigma(S_n) = \sigma(X)\sqrt{n} = 4 \times 8 = 32$.

$$E(M_n) = E(X) = 10, V(M_n) = \frac{V(X)}{n} = \frac{16}{64} = 0,25 \text{ et } \sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}} = \frac{4}{8} = 0,5.$$

2. $\frac{4}{\sqrt{n}} = 0,2 \iff \sqrt{n} = 20 \iff n = 400$.

3. $\sigma(M_{kn}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{kn}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \sigma(M_n)$. Pour diviser par 3, il faut $\sqrt{k} = 3$, donc $k = 9$.

Conclusion : $\sigma(M_{64}) = 0,5$; il faut $n = 400$; pour diviser l'écart-type par 3, il faut 9 fois plus d'observations.

B7. On a $\mu = 20$ et $V(X) = 9$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $\delta > 0$:

$$P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}.$$

1. Avec $\delta = 6$: $P(|X - 20| \geq 6) \leq \frac{9}{36} = 0,25$.

2. $10 < X < 30 \iff -10 < X - 20 < 10 \iff |X - 20| < 10$. Avec $\delta = 10$: $P(|X - 20| \geq 10) \leq \frac{9}{100} = 0,09$. Par événement contraire : $P(10 < X < 30) \geq 1 - 0,09 = 0,91$.

3. On veut $\frac{9}{\delta^2} = 0,01 \iff \delta^2 = 900 \iff \delta = 30$.

4. Avec $\delta = 3$: $P(|X - 20| \geq 3) \leq \frac{9}{9} = 1$. L'inégalité est vraie mais sans intérêt, car une probabilité est toujours inférieure ou égale à 1.

Conclusion : $P(|X - 20| \geq 6) \leq 0,25$; $P(10 < X < 30) \geq 0,91$; $\delta = 30$; pour $\delta = 3$ la majoration vaut 1 et n'apprend rien.

B8.

1. Le nombre de « pile » X suit $\mathcal{B}\left(1000; \frac{1}{2}\right)$ et $F = \frac{X}{1000}$. Donc $E(F) = \frac{1000 \times 0,5}{1000} = 0,5$ et

$$V(F) = \frac{V(X)}{1000^2} = \frac{1000 \times 0,25}{10^6} = 0,00025.$$

2. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\mu = 0,5$ et $\delta = 0,05$: $P(|F - 0,5| \geq 0,05) \leq \frac{0,00025}{0,0025} = 0,1$.

$$\text{Par événement contraire : } P(0,45 < F < 0,55) \geq 1 - 0,1 = 0,9.$$

3. Pour n lancers, $E(F_n) = 0,5$ et $V(F_n) = \frac{0,25}{n}$. L'inégalité donne

$$P(|F_n - 0,5| \geq 0,05) \leq \frac{0,25}{n \times 0,0025} = \frac{100}{n}. \text{ On veut } \frac{100}{n} \leq 0,01 \iff n \geq 10\,000.$$

Conclusion : avec 1000 lancers, la fréquence est dans $]0,45; 0,55[$ avec une probabilité d'au moins 0,9 ; $n = 10\,000$ lancers garantissent un risque d'au plus 0,01.

B9.

1. Chaque dé a pour espérance $\frac{7}{2}$ et pour variance $\frac{35}{12}$. Les deux lancers sont indépendants, donc

$$E(S) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7 \text{ et } V(S) = \frac{35}{12} + \frac{35}{12} = \frac{35}{6} \approx 5,83.$$

2. Le script simule $N = 10\,000$ valeurs de S et calcule leur moyenne $\mathbf{m}$ et leur variance empirique $\mathbf{v}$. Il affiche des valeurs proches de 7 et de 5,83 (par exemple 6,99 et 5,85, avec des écarts d'une exécution à l'autre). C'est la loi des grands nombres : la moyenne de N observations indépendantes se concentre autour de l'espérance quand N grandit.

3. On remplace les trois dernières lignes (calcul de $\mathbf{m}$ et $\mathbf{v}$, affichage) par un comptage :

```
c = sum(1 for x in liste if x >= 10)
print(c / N)
```

Les issues $S \geq 10$ sont (4, 6), (5, 5), (6, 4), (5, 6), (6, 5), (6, 6) : 6 sur 36. La fréquence approche $\frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0,167$.

Conclusion : $E(S) = 7$, $V(S) = \frac{35}{6}$; le script affiche environ 7 et 5,83 ; la fréquence demandée approche $\frac{1}{6}$.

B10.

1. Vrai : c'est la linéarité de l'espérance, valable sans hypothèse d'indépendance.

2. Faux : pour des variables indépendantes, $V(2X - 3Y) = 2^2V(X) + (-3)^2V(Y) = 4V(X) + 9V(Y)$.

3. Vrai : $V(X) = np(1-p) = 10 \times 0,5 \times 0,5 = 2,5$.

4. Faux : $\sigma(M_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Avec $100n$ observations, l'écart-type est divisé par $\sqrt{100} = 10$.

5. Faux : l'inégalité donne seulement $P(|X| \geq 2) \leq \frac{1}{4}$. Contre-exemple : X vaut -1 ou 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$; alors $E(X) = 0$, $V(X) = 1$ et $P(|X| \geq 2) = 0$.

Conclusion : vrai, faux, vrai, faux, faux.