

Fiche 3 : inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Huit exercices pour maîtriser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

- application à une variable d'espérance et de variance données ;
- application à une loi binomiale, comparaison avec la valeur exacte ;
- inégalité de concentration pour une fréquence ;
- taille d'un échantillon pour un sondage ;
- moyenne d'un dé ;
- démonstration de l'inégalité ;
- comparaison avec le calcul exact en Python ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- l'espérance μ et la variance V sont **calculées et écrites** ;
- le réel δ est **précisé** ;
- l'inégalité est **citée** avant d'être appliquée ;
- le résultat est **interprété** : borne sur une probabilité, ou minorant de la probabilité contraire.

Le modèle de rédaction d'une inégalité de Bienaymé-Tchebychev

« X suit la loi $\mathcal{B}(100; 0,5)$: $E(X) = 50$ et $V(X) = 25$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = 10$:

$$P(|X - 50| \geq 10) \leq \frac{V(X)}{\delta^2} = \frac{25}{100} = 0,25.$$

Donc $P(|X - 50| < 10) \geq 1 - 0,25 = 0,75$: avec une probabilité d'au moins 0,75, on obtient entre 41 et 59 « pile ». »

- **Écris** μ , V et δ .
- **Cite l'inégalité**, puis remplace.
- **Interprète** avec l'événement contraire : « au moins ... de chances que $|X - \mu| < \delta$ ».

Les pièges classiques

- Prendre l'inégalité pour la **valeur exacte** : c'est une majoration, souvent large.
- Oublier que $V(X)$ est au numérateur et δ^2 au dénominateur (**le carré**).
- Oublier que l'événement est $|X - \mu| \geq \delta$ (inégalité **large**), et sa contraire $|X - \mu| < \delta$ (stricte).
- Appliquer l'inégalité quand $\frac{V(X)}{\delta^2} \geq 1$: elle est vraie mais **sans intérêt**.

Bienaymé-Tchebychev, c'est le vigile du bar : il ne sait pas combien de personnes sont déjà dans la salle, mais il te garantit que la salle n'est pas remplie de gens qui se sont éloignés de la moyenne.

Exercice 1 (★★) : une variable quelconque

Une variable aléatoire X a pour espérance 10 et pour variance 4.

1. Majorer $P(|X - 10| \geq 5)$.
2. Minorer $P(|X - 10| < 4)$.
3. Que donne l'inégalité pour $\delta = 1$?

Correction de l'exercice 1

On a $\mu = E(X) = 10$ et $V(X) = 4$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $\delta > 0$: $P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$.

Question 1

Avec $\delta = 5$:

$$P(|X - 10| \geq 5) \leq \frac{4}{25}$$

$$P(|X - 10| \geq 5) \leq 0,16$$

Question 2

Avec $\delta = 4$: $P(|X - 10| \geq 4) \leq \frac{4}{16} = 0,25$. Par événement contraire :

$$P(|X - 10| < 4) \geq 1 - 0,25$$

$$P(|X - 10| < 4) \geq 0,75$$

Question 3

Avec $\delta = 1$: $P(|X - 10| \geq 1) \leq \frac{4}{1} = 4$.

L'inégalité est vraie mais sans intérêt : une probabilité est toujours inférieure ou égale à

1. Elle n'apprend rien quand $\frac{V(X)}{\delta^2} \geq 1$.

Exercice 2 (★★) : une loi binomiale

Soit X une variable de loi $\mathcal{B}\left(100; \frac{1}{2}\right)$ (nombre de « pile » sur 100 lancers).

1. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. Majorer $P(|X - 50| \geq 10)$ et en déduire un minorant de la probabilité d'obtenir strictement entre 40 et 60 « pile ».
3. La valeur exacte de $P(|X - 50| \geq 10)$ est environ 0,057. Commenter.

Correction de l'exercice 2

Question 1

$$E(X) = 100 \times \frac{1}{2}$$

$$E(X) = 50$$

$$V(X) = 100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$V(X) = 25$$

Question 2

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = 10$:

$$P(|X - 50| \geq 10) \leq \frac{25}{100}$$

$$P(|X - 50| \geq 10) \leq 0,25$$

Par événement contraire :

$$P(40 < X < 60) \geq 0,75$$

Question 3

La valeur exacte 0,057 est bien inférieure à la majoration 0,25 : l'inégalité est vraie, mais **large**. Elle a l'avantage de s'appliquer à **toute** variable, sans connaître la loi complète.

Exercice 3 (★★★) : la fréquence de « pile »

On lance n fois une pièce équilibrée. Soit F_n la fréquence de « pile ».

1. Calculer $E(F_n)$ et $V(F_n)$.
2. Pour $n = 400$, majorer $P(|F_n - 0,5| \geq 0,05)$.
3. Quelle valeur de n garantit $P(|F_n - 0,5| \geq 0,05) \leq 0,05$?

Correction de l'exercice 3

Question 1

Soit $X_n \sim \mathcal{B}\left(n; \frac{1}{2}\right)$ le nombre de « pile ». $F_n = \frac{X_n}{n}$.

$$E(F_n) = \frac{np}{n}$$

$$E(F_n) = 0,5$$

$$V(F_n) = \frac{V(X_n)}{n^2} = \frac{n \times 0,5 \times 0,5}{n^2}$$

$$V(F_n) = \frac{0,25}{n}$$

Question 2

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = 0,05$:

$$P(|F_{400} - 0,5| \geq 0,05) \leq \frac{0,25/400}{0,05^2} = \frac{0,000625}{0,0025}$$

$$P(|F_{400} - 0,5| \geq 0,05) \leq 0,25$$

Question 3

$$\text{On veut } \frac{0,25}{n \times 0,0025} \leq 0,05 \iff n \geq \frac{0,25}{0,0025 \times 0,05} = 2\,000.$$

Il suffit de $n = 2\,000$ lancers pour garantir une probabilité d'au plus **0,05** que la fréquence s'écarte de **0,5** d'au moins **0,05**.

Exercice 4 (★★) : la taille d'un sondage

Dans une population, une proportion inconnue p de personnes est favorable à un projet. On interroge n personnes au hasard (avec remise) et on note F_n la fréquence de personnes favorables.

Déterminer une taille n garantissant que, avec une probabilité d'au moins **0,95**, F_n diffère de p de moins de **0,03**, **quelle que soit la valeur de p** .

Correction de l'exercice 4

$X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$ compte les personnes favorables, et $F_n = \frac{X_n}{n}$ vérifie $E(F_n) = p$ et $V(F_n) = \frac{p(1-p)}{n}$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = 0,03$:

$$P(|F_n - p| \geq 0,03) \leq \frac{p(1-p)}{n \times 0,03^2}$$

Or $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ pour tout $p \in [0; 1]$. Donc :

$$P(|F_n - p| \geq 0,03) \leq \frac{1}{4n \times 0,0009}$$

On veut ce majorant inférieur ou égal à 0,05 :

$$\frac{1}{0,0036 n} \leq 0,05 \iff n \geq \frac{1}{0,0036 \times 0,05} = \frac{1}{0,00018} \approx 5\,555,6$$

Il suffit d'interroger $n = 5\,556$ personnes.

Alors $P(|F_n - p| < 0,03) \geq 0,95$ quelle que soit la valeur de p .

Exercice 5 (★★) : la moyenne d'un dé

On lance n fois un dé équilibré. Soit M_n la moyenne des résultats.

1. Rappeler $E(X)$ et $V(X)$ pour un lancer. Que valent $E(M_n)$ et $V(M_n)$?
2. Majorer $P(|M_n - 3,5| \geq 0,5)$ en fonction de n . Calculer pour $n = 100$.
3. Quelle valeur de n garantit que cette probabilité est inférieure ou égale à 0,01 ?

Correction de l'exercice 5

Question 1

Pour un lancer : $E(X) = \frac{7}{2}$ et $V(X) = \frac{35}{12}$.

$$E(M_n) = \frac{7}{2} \text{ et } V(M_n) = \frac{V(X)}{n} = \frac{35}{12n}$$

Question 2

D'après l'inégalité de concentration avec $\delta = 0,5$:

$$P(|M_n - 3,5| \geq 0,5) \leq \frac{35/12}{n \times 0,25} = \frac{35}{3n}$$

Pour $n = 100$:

$$P(|M_{100} - 3,5| \geq 0,5) \leq \frac{35}{300} \approx 0,117$$

Question 3

$$\frac{35}{3n} \leq 0,01 \iff n \geq \frac{35}{0,03} \approx 1\,166,7$$

Il suffit de $n = 1\,167$ lancers.

Exercice 6 (★★★) : démontrer l'inégalité

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, \dots, x_r$, d'espérance μ et de variance V . Soit $\delta > 0$. Montrer que $P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{\delta^2}$.

Correction de l'exercice 6

Par définition, $V = \sum_{i=1}^r p_i (x_i - \mu)^2$, avec des termes tous positifs.

On ne garde que les indices i tels que $|x_i - \mu| \geq \delta$. Pour ces indices, $(x_i - \mu)^2 \geq \delta^2$. Comme on retire des termes positifs :

$$V \geq \sum_{i: |x_i - \mu| \geq \delta} p_i (x_i - \mu)^2 \geq \sum_{i: |x_i - \mu| \geq \delta} p_i \delta^2 = \delta^2 P(|X - \mu| \geq \delta)$$

En divisant par $\delta^2 > 0$:

$$P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{\delta^2} \blacksquare$$

Exercice 7 (★★) : comparer avec la valeur exacte en Python

On utilise le script :

```
from math import comb

def exacte(n, p, ecart):
    return sum(comb(n, k) * p**k * (1 - p)**(n - k)
               for k in range(n + 1) if abs(k - n*p) >= ecart)
```

Cette fonction calcule $P(|X - np| \geq \text{ecart})$ pour $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

1. Que calcule `exacte(400, 0.5, 20)` ? Quelle est la borne de Bienaymé-Tchebychev correspondante ?
2. Le script renvoie environ `0.0510`. Commenter.

Correction de l'exercice 7

Question 1

`exacte(400, 0.5, 20)` calcule $P(|X - 200| \geq 20)$ pour $X \sim \mathcal{B}(400; 0,5)$. Cela revient à $P(|F_{400} - 0,5| \geq 0,05)$ pour la fréquence.

Avec $V(X) = 100$ et $\delta = 20$, la borne est :

$$\frac{100}{400} = 0,25 \text{ (même valeur que l'exercice 3, question 2)}$$

Question 2

La valeur exacte $\approx 0,051$ est beaucoup plus petite que la borne **0,25** : l'inégalité est vraie mais **très large**. Elle reste utile car elle est valable pour toutes les lois et permet de dimensionner un échantillon.

Exercice 8 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne la valeur exacte de $P(|X - \mu| \geq \delta)$.
2. Si $\frac{V(X)}{\delta^2} \geq 1$, l'inégalité n'apprend rien.
3. $P(|X - \mu| < \delta) \geq 1 - \frac{V(X)}{\delta^2}$.
4. L'inégalité ne s'applique qu'aux lois binomiales.

Correction de l'exercice 8

Affirmation 1

C'est une **majoration** : la probabilité exacte peut être beaucoup plus petite (exercices 2 et 7).

Faux.

Affirmation 2

Une probabilité est toujours inférieure ou égale à 1 : une majoration par un nombre supérieur ou égal à 1 est automatiquement vraie.

Vrai.

Affirmation 3

C'est la forme complémentaire de l'inégalité, obtenue avec l'événement contraire.

Vrai.

Affirmation 4

L'inégalité vaut pour **toute** variable aléatoire d'espérance et de variance connues.

Faux.

Exercice 9 (★★★) : marche aléatoire et Bienaymé-Tchebychev

Un marcheur fait $n = 100$ pas indépendants, chacun de $+1$ ou -1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$. On note X_i le i -ième pas et $S = X_1 + \dots + X_{100}$ la position finale.

1. Calculer $E(X_i)$, $V(X_i)$ puis $E(S)$ et $V(S)$.
2. Majorer $P(|S| \geq 20)$ avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
3. Que donne cette simulation ?

```
from random import choice

N = 20000
compte = 0
for i in range(N):
    S = sum(choice([-1, 1]) for _ in range(100))
    if abs(S) >= 20:
        compte = compte + 1
print(compte / N)
```

4. Comparer la majoration à la valeur exacte $\approx 0,057$.

Correction de l'exercice 9

Question 1

$$E(X_i) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times (-1) = 0 \text{ et } V(X_i) = E(X_i^2) - 0 = 1.$$

Les pas sont indépendants : $E(S) = 0$ et $V(S) = 100 \times 1 = 100$.

$$E(S) = 0, V(S) = 100 \text{ et } \sigma(S) = 10.$$

Question 2

$$P(|S - E(S)| \geq 20) \leq \frac{V(S)}{20^2} = \frac{100}{400}.$$

$$P(|S| \geq 20) \leq 0,25.$$

Question 3

La simulation affiche une fréquence voisine de 0,057.

Question 4

La majoration 0,25 est **vraie mais grossière** : elle vaut plus de quatre fois la valeur exacte.

C'est normal : l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'applique à **toute** variable aléatoire, donc elle ne peut pas être précise pour une loi particulière.

Exercice 10 (★★) : $E(XY) = E(X)E(Y)$ et la réciproque

1. X prend les valeurs 1 et 2 avec les probabilités 0,3 et 0,7 ; Y prend les valeurs 0 et 4 avec les probabilités 0,5 et 0,5. X et Y sont indépendantes. Calculer $E(X)E(Y)$ et $E(XY)$.

2. X prend les valeurs $-1, 0, 1$ avec la même probabilité $\frac{1}{3}$, et $Y = X^2$. Calculer $E(X)E(Y)$ et $E(XY)$. X et Y sont-elles indépendantes ?

Correction de l'exercice 10

Question 1

$E(X) = 0,3 + 1,4 = 1,7$ et $E(Y) = 0 + 2 = 2$, donc $E(X)E(Y) = 3,4$.

XY vaut 0 (si $Y = 0$, probabilité 0,5), 4 (probabilité $0,3 \times 0,5 = 0,15$) ou 8 (probabilité $0,7 \times 0,5 = 0,35$).

$E(XY) = 4 \times 0,15 + 8 \times 0,35 = 0,6 + 2,8 = 3,4$.

$E(XY) = E(X)E(Y) = 3,4$, comme prévu pour des variables indépendantes.

Question 2

$E(X) = 0$ donc $E(X)E(Y) = 0$. $XY = X^3$ vaut $-1, 0, 1$: $E(XY) = \frac{1}{3}(-1 + 0 + 1) = 0$.

Mais $P(X = 1 \text{ et } Y = 0) = 0 \neq P(X = 1)P(Y = 0) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$.

Les deux nombres sont égaux, mais X et Y **ne sont pas indépendantes** : la réciproque est fausse.

Ce qui peut tomber au bac

- L'**inégalité** appliquée à une variable ou à une loi binomiale, avec μ , V , δ écrits (exercices 1 et 2).
- L'**inégalité de concentration** pour une fréquence ou une moyenne (exercices 3 et 5).
- Le **dimensionnement d'un échantillon** (exercices 3, 4, 5).
- La **démonstration** de l'inégalité (exercice 6).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev affirme que, pour $\delta > 0$:

A. $P(|X - \mu| \leq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta}$

B. $P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$ (bonne réponse)

$$C. P(|X - \mu| \geq \delta) \geq \frac{V(X)}{\delta^2}$$

$$D. P(|X - \mu| \geq \delta) = \frac{V(X)}{\delta^2}$$

Justification : C'est une majoration de la probabilité de s'écarter de l'espérance d'au moins δ .

2. Si $E(X) = 10$ et $V(X) = 4$, quelle majoration obtient-on pour $P(|X - 10| \geq 5)$?

A. 0,16 (**bonne réponse**)

B. 0,4

C. 0,04

D. 0,8

$$\text{Justification : } \frac{V(X)}{\delta^2} = \frac{4}{25} = 0,16.$$

3. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

A. la loi de X

B. la valeur exacte de la probabilité

C. **une majoration, souvent large, de la probabilité (bonne réponse)**

D. toujours une probabilité supérieure à $\frac{1}{2}$

Justification : Elle est valable pour toute variable mais ne donne pas la valeur exacte.

4. Quand $\frac{V(X)}{\delta^2} \geq 1$, l'inégalité :

A. est fausse

B. **est vraie mais sans intérêt (bonne réponse)**

C. donne la valeur exacte

D. donne une probabilité négative

Justification : Une probabilité est toujours inférieure ou égale à 1.

5. L'événement $10 < X < 30$ s'écrit avec une valeur absolue :

A. $|X - 20| > 10$

B. $|X - 20| < 10$ (**bonne réponse**)

C. $|X - 30| < 10$

D. $|X - 10| < 20$

Justification : Le centre de l'intervalle est 20 et son demi-écart est 10.

6. Dans l'exercice 1, avec $E(X) = 10$ et $V(X) = 4$, quelle majoration obtient-on pour $P(|X - 10| \geq 5)$?

A. 0,8

B. 0,16 (**bonne réponse**)

C. 0,4

D. 4

$$\text{Justification : } \frac{V(X)}{\delta^2} = \frac{4}{25} = 0,16.$$

7. Dans l'exercice 2, pour $X \sim \mathcal{B}\left(100; \frac{1}{2}\right)$, quel minorant obtient-on pour $P(40 < X < 60)$?

A. 0,25

B. 0,5

C. 0,75 (bonne réponse)

D. 0,9

$$\text{Justification : } P(|X - 50| \geq 10) \leq \frac{25}{100} = 0,25, \text{ donc } P(40 < X < 60) = P(|X - 50| < 10) \geq 1 - 0,25 = 0,75.$$

8. Dans l'exercice 3, quelle taille d'échantillon n garantit $P(|F_n - 0,5| \geq 0,05) \leq 0,05$?

A. $n = 100$ B. $n = 2\,000$ (bonne réponse)C. $n = 400$ D. $n = 500$

$$\text{Justification : } \frac{0,25}{n \times 0,0025} \leq 0,05 \iff n \geq \frac{0,25}{0,0025 \times 0,05} = 2\,000.$$

9. Dans l'exercice 4 (sondage), combien de personnes faut-il interroger pour garantir une précision de 0,03 avec une probabilité d'au moins 0,95, quel que soit p ?

A. $n = 100$ B. $n = 2\,000$ C. $n = 5\,556$ (bonne réponse)D. $n = 1\,000$

$$\text{Justification : On utilise la majoration } p(1-p) \leq \frac{1}{4}, \text{ ce qui donne } n \geq \frac{1}{4 \times 0,0009 \times 0,05} \approx 5\,555,6.$$

10. Dans l'exercice 7, la valeur exacte de $P(|X - 200| \geq 20)$ pour $X \sim \mathcal{B}(400; 0,5)$ est environ 0,051, très inférieure à la majoration 0,25. Que montre cette comparaison ?

A. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est vraie mais souvent large (bonne réponse)

B. La loi binomiale ne s'applique pas ici

C. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est fausse dans ce cas

D. Les deux valeurs devraient être égales

Justification : L'inégalité donne une garantie valable pour toute loi, quitte à être loin de la valeur exacte quand la loi est connue précisément.