

Fiche 2 : sommes de variables aléatoires et indépendance

Huit exercices pour maîtriser les sommes de variables aléatoires :

- loi de la somme de deux variables indépendantes, avec vérification de E et V ;
- la somme de deux dés ;
- la loi binomiale comme somme de variables de Bernoulli ;
- un contre-exemple sans indépendance ;
- la fréquence de « pile » sur 100 lancers ;
- la moyenne d'un échantillon et la taille nécessaire ;
- l'indépendance de deux variables par leur loi conjointe ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- l'**indépendance est justifiée** avant d'additionner des variances ;
- la formule utilisée est citée (linéarité, variance d'une somme) ;
- les calculs sont recoupés (par la loi de la somme, par les formules) ;
- la conclusion est **interprétée**.

Le modèle de rédaction d'une variance de somme

« Les deux lancers sont indépendants, donc les variables X_1 et X_2 sont indépendantes. Par linéarité de l'espérance : $E(S) = E(X_1) + E(X_2) = 7$. Par indépendance : $V(S) = V(X_1) + V(X_2) = 2 \times \frac{35}{12} = \frac{35}{6}$. Donc $\sigma(S) = \sqrt{\frac{35}{6}} \approx 2,42$. »

- **Justifie l'indépendance** avant d'additionner des variances.
- **Espérance** : linéarité, toujours. **Variance** : additivité, seulement si indépendantes.
- N'additionne jamais les **écarts-types**.

Les pièges classiques

- Additionner des variances **sans avoir justifié l'indépendance**.
- Additionner les écarts-types : $\sigma(X + Y) \neq \sigma(X) + \sigma(Y)$.
- Écrire $V(X - Y) = V(X) - V(Y)$: pour des variables indépendantes c'est $V(X) + V(Y)$.
- Oublier que la moyenne M_n a une variance **divisée par n** (et un écart-type divisé par $\sqrt{n}$).

Un échantillon plus grand rend la moyenne plus précise, mais pas de façon linéaire : pour diviser l'incertitude par 2, il faut 4 fois plus de données. Les statisticiens ont le coût de la vie en horreur.

Exercice 1 (★★) : la loi d'une somme

Soient X et Y deux variables **indépendantes**. X prend les valeurs 0 et 1 avec les probabilités 0,5 et 0,5. Y prend les valeurs 1, 2, 3 avec les probabilités 0,2, 0,5, 0,3.

1. Déterminer la loi de $S = X + Y$.
2. Calculer $E(S)$ et $V(S)$ à partir de cette loi.
3. Retrouver ces résultats avec les formules sur les sommes.

Exercice 2 (★★) : la somme de deux dés

On lance deux dés équilibrés indépendants. Soit S la somme des deux résultats. Calculer $E(S)$, $V(S)$ et $\sigma(S)$.

Exercice 3 (★★) : la loi binomiale comme somme

Soit X une variable de loi $\mathcal{B}(n, p)$.

1. Exprimer X comme somme de n variables de Bernoulli. Justifier l'indépendance.
2. En déduire $E(X)$ et $V(X)$.
3. Application : calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ pour $n = 50$ et $p = 0,2$.

Exercice 4 (★★) : sans indépendance

Soit X une variable de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, et $Y = 1 - X$.

1. Calculer $E(X + Y)$ avec la linéarité, puis directement.
2. Calculer $V(X)$, $V(Y)$ et $V(X + Y)$. Que constate-t-on ? Pourquoi ?

Exercice 5 (★★★) : la fréquence de « pile »

On lance 100 fois une pièce équilibrée. Soit X le nombre de « pile » et $F = \frac{X}{100}$ la fréquence.

1. Donner la loi de X , puis $E(X)$, $V(X)$, $\sigma(X)$.
2. Calculer $E(F)$, $V(F)$ et $\sigma(F)$.
3. Interpréter $\sigma(F)$.

Exercice 6 (★★) : la moyenne d'un échantillon

X est une variable d'écart-type $\sigma = 3$. On considère un échantillon de taille n et sa moyenne M_n .

1. Calculer $\sigma(M_n)$ pour $n = 25$.
2. Quelle taille d'échantillon faut-il pour que $\sigma(M_n) = 0,3$?

Exercice 7 (★★) : l'indépendance par la loi conjointe

Pour chacune des lois conjointes suivantes de (X, Y) , dire si X et Y sont indépendantes :

Loi A

	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = 0$	0,3	0,3
$X = 1$	0,2	0,2

Loi B

	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = 0$	0,4	0,2
$X = 1$	0,1	0,3

Exercice 8 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ pour toutes variables X et Y .
2. Si X et Y sont indépendantes, $V(X - Y) = V(X) - V(Y)$.
3. Si X et Y sont indépendantes, $\sigma(X + Y) = \sigma(X) + \sigma(Y)$.
4. La variance de la moyenne de n observations indépendantes est $\frac{V(X)}{n}$.

Ce qui peut tomber au bac

- La **loi d'une somme** de variables indépendantes et le recouplement avec les formules (exercice 1).
- Une **somme de variables** : dés, gains répétés (exercice 2).
- La **loi binomiale** obtenue comme somme de variables de Bernoulli (exercice 3).
- La **fréquence** et la **moyenne d'un échantillon** (exercices 5 et 6).
- L'**indépendance** de variables (exercices 4 et 7).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. L'égalité $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ est vraie :
 - A. seulement si X et Y sont indépendantes
 - B. toujours
 - C. seulement si $X = Y$
 - D. jamais
2. Pour des variables X et Y indépendantes, $V(X + Y)$ vaut :
 - A. $E(X) + E(Y)$
 - B. $V(X) + V(Y)$
 - C. $V(X) - V(Y)$
 - D. $V(X) \times V(Y)$
3. Pour des variables indépendantes, $V(X - Y)$ vaut :
 - A. $V(X) + V(Y)$
 - B. 0
 - C. $V(X) - V(Y)$
 - D. $V(Y) - V(X)$
4. Quelle est la variance d'une variable de loi $\mathcal{B}(50; 0,2)$?
 - A. 8
 - B. 10
 - C. 40
 - D. 2,8
5. On lance deux dés équilibrés indépendants. Quelle est l'espérance de la somme des résultats ?
 - A. 3,5
 - B. 12
 - C. 6

- D. 7
6. Dans l'exercice 1, avec X (valeurs 0,1, probabilités 0,5 chacune) et Y (valeurs 1,2,3, probabilités 0,2 ; 0,5 ; 0,3) indépendantes, que vaut $E(S)$ pour $S = X + Y$?
- A. 2
B. 2,6
C. 0,5
D. 3
7. Dans l'exercice 3, la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ s'obtient comme somme de n variables de Bernoulli. Pour $n = 50$ et $p = 0,2$, que vaut $V(X)$?
- A. 2,83
B. 40
C. 8
D. 10
8. Dans l'exercice 4, avec X de Bernoulli $\left(\frac{1}{2}\right)$ et $Y = 1 - X$, pourquoi $V(X + Y) \neq V(X) + V(Y)$?
- A. $V(X) = 0$
B. $X + Y$ n'est pas définie
C. X et Y ne sont pas indépendantes
D. La formule est fausse en général
9. Dans l'exercice 5 (fréquence de « pile » sur 100 lancers), que vaut $\sigma(F)$?
- A. 0,05
B. 0,0025
C. 0,5
D. 5
10. Dans l'exercice 6, avec $\sigma(X) = 3$, quelle taille d'échantillon n donne $\sigma(M_n) = 0,3$?
- A. $n = 10$
B. $n = 100$
C. $n = 30$
D. $n = 9$