

Fiche 2 : sommes de variables aléatoires et indépendance

Huit exercices pour maîtriser les sommes de variables aléatoires :

- loi de la somme de deux variables indépendantes, avec vérification de E et V ;
- la somme de deux dés ;
- la loi binomiale comme somme de variables de Bernoulli ;
- un contre-exemple sans indépendance ;
- la fréquence de « pile » sur 100 lancers ;
- la moyenne d'un échantillon et la taille nécessaire ;
- l'indépendance de deux variables par leur loi conjointe ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- l'**indépendance est justifiée** avant d'additionner des variances ;
- la formule utilisée est citée (linéarité, variance d'une somme) ;
- les calculs sont recoupés (par la loi de la somme, par les formules) ;
- la conclusion est **interprétée**.

Le modèle de rédaction d'une variance de somme

« Les deux lancers sont indépendants, donc les variables X_1 et X_2 sont indépendantes. Par linéarité de l'espérance : $E(S) = E(X_1) + E(X_2) = 7$. Par indépendance : $V(S) = V(X_1) + V(X_2) = 2 \times \frac{35}{12} = \frac{35}{6}$. Donc $\sigma(S) = \sqrt{\frac{35}{6}} \approx 2,42$. »

- **Justifie l'indépendance** avant d'additionner des variances.
- **Espérance** : linéarité, toujours. **Variance** : additivité, seulement si indépendantes.
- N'additionne jamais les **écarts-types**.

Les pièges classiques

- Additionner des variances **sans avoir justifié l'indépendance**.
- Additionner les écarts-types : $\sigma(X + Y) \neq \sigma(X) + \sigma(Y)$.
- Écrire $V(X - Y) = V(X) - V(Y)$: pour des variables indépendantes c'est $V(X) + V(Y)$.
- Oublier que la moyenne M_n a une variance **divisée par n** (et un écart-type divisé par $\sqrt{n}$).

Un échantillon plus grand rend la moyenne plus précise, mais pas de façon linéaire : pour diviser l'incertitude par 2, il faut 4 fois plus de données. Les statisticiens ont le coût de la vie en horreur.

Exercice 1 (★★) : la loi d'une somme

Soient X et Y deux variables **indépendantes**. X prend les valeurs 0 et 1 avec les probabilités 0,5 et 0,5. Y prend les valeurs 1, 2, 3 avec les probabilités 0,2, 0,5, 0,3.

1. Déterminer la loi de $S = X + Y$.
2. Calculer $E(S)$ et $V(S)$ à partir de cette loi.
3. Retrouver ces résultats avec les formules sur les sommes.

Correction de l'exercice 1

Question 1

Comme X et Y sont indépendantes, $P(X = x \text{ et } Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$.

$P(S = 1) : (X = 0, Y = 1)$, donc $0,5 \times 0,2 = 0,1$.

$P(S = 2) : (0,2) \text{ ou } (1,1)$, donc $0,5 \times 0,5 + 0,5 \times 0,2 = 0,35$.

$P(S = 3) : (0,3) \text{ ou } (1,2)$, donc $0,5 \times 0,3 + 0,5 \times 0,5 = 0,40$.

$P(S = 4) : (1,3)$, donc $0,5 \times 0,3 = 0,15$.

s_i	1	2	3	4
$P(S = s_i)$	0,1	0,35	0,4	0,15

La somme des probabilités vaut 1 .

Question 2

$$E(S) = 1 \times 0,1 + 2 \times 0,35 + 3 \times 0,4 + 4 \times 0,15 = 0,1 + 0,7 + 1,2 + 0,6$$

$$E(S) = 2,6$$

$$E(S^2) = 1 \times 0,1 + 4 \times 0,35 + 9 \times 0,4 + 16 \times 0,15 = 0,1 + 1,4 + 3,6 + 2,4 = 7,5$$

$$V(S) = 7,5 - 2,6^2 = 7,5 - 6,76$$

$$V(S) = 0,74$$

Question 3

$$E(X) = 0,5 \text{ et } E(Y) = 0,2 + 1 + 0,9 = 2,1. \text{ Par linéarité : } E(S) = E(X) + E(Y) = 2,6 .$$

$$V(X) = 0,5 \times 0,5 = 0,25. E(Y^2) = 0,2 + 2 + 2,7 = 4,9 \text{ donc } V(Y) = 4,9 - 2,1^2 = 0,49.$$

$$\text{Par indépendance : } V(S) = V(X) + V(Y) = 0,25 + 0,49 = 0,74 .$$

Exercice 2 (★★) : la somme de deux dés

On lance deux dés équilibrés indépendants. Soit S la somme des deux résultats. Calculer $E(S)$, $V(S)$ et $\sigma(S)$.

Correction de l'exercice 2

Soient X_1 et X_2 les résultats des deux dés. Ils sont indépendants (lancers indépendants), et chacun a pour espérance $\frac{7}{2}$ et pour variance $\frac{35}{12}$ (fiche 1).

Par linéarité : $E(S) = E(X_1) + E(X_2) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2}$

$$E(S) = 7$$

Par indépendance : $V(S) = V(X_1) + V(X_2) = 2 \times \frac{35}{12}$

$$V(S) = \frac{35}{6} \approx 5,83$$

$$\sigma(S) = \sqrt{\frac{35}{6}} \approx 2,42$$

Exercice 3 (★★) : la loi binomiale comme somme

Soit X une variable de loi $\mathcal{B}(n, p)$.

1. Exprimer X comme somme de n variables de Bernoulli. Justifier l'indépendance.
2. En déduire $E(X)$ et $V(X)$.
3. Application : calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ pour $n = 50$ et $p = 0,2$.

Correction de l'exercice 3

Question 1

X compte les succès dans n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Soit X_i la variable qui vaut 1 si la i -ème épreuve est un succès, 0 sinon.

Les X_i sont de Bernoulli de paramètre p , et **indépendantes** (les épreuves sont indépendantes). Alors :

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

Question 2

$E(X_i) = p$ et $V(X_i) = p(1 - p)$. Par linéarité : $E(X) = np$. Par indépendance : $V(X) = np(1 - p)$.

$$E(X) = np \text{ et } V(X) = np(1 - p)$$

Question 3

$$E(X) = 50 \times 0,2$$

$$E(X) = 10$$

$$V(X) = 50 \times 0,2 \times 0,8$$

$$V(X) = 8$$

$$\sigma(X) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2,83$$

Exercice 4 (★★) : sans indépendance

Soit X une variable de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, et $Y = 1 - X$.

1. Calculer $E(X + Y)$ avec la linéarité, puis directement.
2. Calculer $V(X)$, $V(Y)$ et $V(X + Y)$. Que constate-t-on ? Pourquoi ?

Correction de l'exercice 4

Question 1

$$E(X) = \frac{1}{2} \text{ et } E(Y) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \text{ Par linéarité : } E(X + Y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Directement : $X + Y = X + (1 - X) = 1$ est constante, donc $E(X + Y) = 1$.

Question 2

$$V(X) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \quad V(Y) = V(1 - X) = (-1)^2 V(X) = \frac{1}{4}.$$

$X + Y = 1$ est constante : $V(X + Y) = 0$.

$$V(X + Y) = 0 \neq V(X) + V(Y) = \frac{1}{2}$$

Explication : X et Y ne sont **pas indépendantes** (Y est déterminée par X).

L'égalité $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ n'est valable que pour des variables indépendantes.

L'espérance, elle, s'additionne toujours.

Exercice 5 (★★★) : la fréquence de « pile »

On lance 100 fois une pièce équilibrée. Soit X le nombre de « pile » et $F = \frac{X}{100}$ la fréquence.

1. Donner la loi de X , puis $E(X)$, $V(X)$, $\sigma(X)$.
2. Calculer $E(F)$, $V(F)$ et $\sigma(F)$.
3. Interpréter $\sigma(F)$.

Correction de l'exercice 5

Question 1

On répète 100 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

X suit $\mathcal{B}\left(100; \frac{1}{2}\right)$.

$$E(X) = 100 \times \frac{1}{2} = 50, V(X) = 100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 25, \sigma(X) = 5.$$

Question 2

$F = \frac{1}{100}X$ est une transformation linéaire de X .

$$E(F) = \frac{1}{100}E(X)$$

$$E(F) = 0,5$$

$$V(F) = \left(\frac{1}{100}\right)^2 V(X) = \frac{25}{10\,000}$$

$$V(F) = 0,0025$$

$$\sigma(F) = 0,05$$

Question 3

La fréquence de « pile » est en moyenne 0,5, avec un écart typique de 0,05 : sur 100 lancers, la fréquence observée est le plus souvent comprise entre 0,45 et 0,55.

Exercice 6 (★★) : la moyenne d'un échantillon

X est une variable d'écart-type $\sigma = 3$. On considère un échantillon de taille n et sa moyenne M_n .

1. Calculer $\sigma(M_n)$ pour $n = 25$.
2. Quelle taille d'échantillon faut-il pour que $\sigma(M_n) = 0,3$?

Correction de l'exercice 6

On a $\sigma(M_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Question 1

$$\sigma(M_{25}) = \frac{3}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\sigma(M_{25}) = 0,6$$

Question 2

$$\frac{3}{\sqrt{n}} = 0,3 \iff \sqrt{n} = 10 \iff n = 100$$

Il faut $n = 100$.

À retenir : pour diviser l'écart-type de la moyenne par 2, il faut multiplier la taille de l'échantillon par 4 (ici de 25 à 100).

Exercice 7 (★★) : l'indépendance par la loi conjointe

Pour chacune des lois conjointes suivantes de (X, Y) , dire si X et Y sont indépendantes :

Loi A

	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = 0$	0,3	0,3
$X = 1$	0,2	0,2

Loi B

	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = 0$	0,4	0,2
$X = 1$	0,1	0,3

Correction de l'exercice 7

Méthode

On calcule les lois marginales (sommes des lignes et des colonnes), puis on compare $P(X = x, Y = y)$ à $P(X = x)P(Y = y)$ pour les quatre cases.

Loi A

$$P(X = 0) = 0,6, P(X = 1) = 0,4, P(Y = 0) = 0,5, P(Y = 1) = 0,5.$$

$$P(X = 0)P(Y = 0) = 0,3 = P(X = 0, Y = 0)$$

$$P(X = 0)P(Y = 1) = 0,3 = P(X = 0, Y = 1)$$

$$P(X = 1)P(Y = 0) = 0,2 = P(X = 1, Y = 0)$$

$$P(X = 1)P(Y = 1) = 0,2 = P(X = 1, Y = 1)$$

Loi A : X et Y sont indépendantes.

Loi B

$P(X = 0) = 0,6$ et $P(Y = 0) = 0,5$, donc $P(X = 0)P(Y = 0) = 0,3$. Or $P(X = 0, Y = 0) = 0,4 \neq 0,3$.

Loi B : X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 8 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ pour toutes variables X et Y .
2. Si X et Y sont indépendantes, $V(X - Y) = V(X) - V(Y)$.
3. Si X et Y sont indépendantes, $\sigma(X + Y) = \sigma(X) + \sigma(Y)$.
4. La variance de la moyenne de n observations indépendantes est $\frac{V(X)}{n}$.

Correction de l'exercice 8

Affirmation 1

C'est la linéarité de l'espérance, valable **sans** hypothèse d'indépendance.

Vrai.

Affirmation 2

Pour des variables indépendantes, $V(X - Y) = V(X) + V(-Y) = V(X) + (-1)^2 V(Y) = V(X) + V(Y)$.

Faux.

Affirmation 3

Ce sont les **variances** qui s'additionnent, pas les écarts-types. Contre-exemple : deux dés,

$$\sigma(S) = \sqrt{\frac{35}{6}} \approx 2,42 \text{ alors que } \sigma(X_1) + \sigma(X_2) \approx 3,42.$$

Faux.

Affirmation 4

$$V(M_n) = \frac{1}{n^2} V(S_n) = \frac{1}{n^2} \times n V(X) = \frac{V(X)}{n}.$$

Vrai.**Ce qui peut tomber au bac**

- La **loi d'une somme** de variables indépendantes et le recouplement avec les formules (exercice 1).
- Une **somme de variables** : dés, gains répétés (exercice 2).
- La **loi binomiale** obtenue comme somme de variables de Bernoulli (exercice 3).
- La **fréquence** et la **moyenne d'un échantillon** (exercices 5 et 6).
- L'**indépendance** de variables (exercices 4 et 7).

QCM : une seule bonne réponse par question1. L'égalité $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ est vraie :

- A. seulement si X et Y sont indépendantes
- B. **toujours (bonne réponse)**
- C. seulement si $X = Y$
- D. jamais

Justification : C'est la linéarité de l'espérance, sans hypothèse d'indépendance.2. Pour des variables X et Y indépendantes, $V(X + Y)$ vaut :

- A. $E(X) + E(Y)$
- B. $V(X) + V(Y)$ **(bonne réponse)**
- C. $V(X) - V(Y)$
- D. $V(X) \times V(Y)$

Justification : La variance d'une somme de variables indépendantes est la somme des variances.3. Pour des variables indépendantes, $V(X - Y)$ vaut :

- A. $V(X) + V(Y)$ **(bonne réponse)**
- B. 0
- C. $V(X) - V(Y)$
- D. $V(Y) - V(X)$

Justification : $V(-Y) = (-1)^2 V(Y) = V(Y)$, donc les variances s'additionnent.

4. Quelle est la variance d'une variable de loi $\mathcal{B}(50; 0,2)$?

- A. 8 (bonne réponse)
- B. 10
- C. 40
- D. 2,8

Justification : $np(1-p) = 50 \times 0,2 \times 0,8 = 8$.

5. On lance deux dés équilibrés indépendants. Quelle est l'espérance de la somme des résultats ?

- A. 3,5
- B. 12
- C. 6
- D. 7 (bonne réponse)

Justification : $E(S) = 3,5 + 3,5 = 7$.

6. Dans l'exercice 1, avec X (valeurs 0,1, probabilités 0,5 chacune) et Y (valeurs 1,2,3, probabilités 0,2; 0,5; 0,3) indépendantes, que vaut $E(S)$ pour $S = X + Y$?

- A. 2
- B. 2,6 (bonne réponse)
- C. 0,5
- D. 3

Justification : Par linéarité : $E(S) = E(X) + E(Y) = 0,5 + 2,1 = 2,6$.

7. Dans l'exercice 3, la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ s'obtient comme somme de n variables de Bernoulli. Pour $n = 50$ et $p = 0,2$, que vaut $V(X)$?

- A. 2,83
- B. 40
- C. 8 (bonne réponse)
- D. 10

Justification : $V(X) = np(1-p) = 50 \times 0,2 \times 0,8 = 8$.

8. Dans l'exercice 4, avec X de Bernoulli $\left(\frac{1}{2}\right)$ et $Y = 1 - X$, pourquoi $V(X + Y) \neq V(X) + V(Y)$?

- A. $V(X) = 0$
- B. $X + Y$ n'est pas définie
- C. X et Y ne sont pas indépendantes (bonne réponse)
- D. La formule est fausse en général

Justification : Y est entièrement déterminée par X : elles ne sont pas indépendantes, donc l'additivité des variances ne s'applique pas.

9. Dans l'exercice 5 (fréquence de « pile » sur 100 lancers), que vaut $\sigma(F)$?

A. 0,05 (bonne réponse)

B. 0,0025

C. 0,5

D. 5

Justification : $V(F) = \frac{V(X)}{100^2} = \frac{25}{10\,000} = 0,0025$, donc $\sigma(F) = \sqrt{0,0025} = 0,05$.

10. Dans l'exercice 6, avec $\sigma(X) = 3$, quelle taille d'échantillon n donne $\sigma(M_n) = 0,3$?

A. $n = 10$

B. $n = 100$ (bonne réponse)

C. $n = 30$

D. $n = 9$

Justification : $\frac{3}{\sqrt{n}} = 0,3 \iff \sqrt{n} = 10 \iff n = 100$.